



Sinyaller ve Sistemler

“Sinyallerin ve Sistemlerin Matematiksel Modellenmesi”

Dr. Cahit Karakuş, 2020

Fiziksel Sistemlerin Matematiksel Modelleri

- Otomasyon ve otonom sistemlerinin analizi ve tasarımı için, sistemlerin matematiksel bir tanımının formüle edilmesi gerekir.
- Sistemlerin istenen matematiksel tanımının elde edilme süreci “**modelleme**” olarak bilinir.
- Dinamik fiziksel sistemlerin temel modelleri, uygun doğa yasalarının uygulanmasıyla elde edilen diferansiyel denklemlerdir. Bu denklemler, modellenen fenomene bağlı olarak doğrusal veya doğrusal olmayabilir.
- Diferansiyel denklemler, analiz ve tasarım manipülasyonları için elverişsizdir ve bu nedenle diferansiyel denklemleri cebirsel denklemlere dönüştüren Laplace Dönüşümü'nden yararlanır.
- Cebirsel denklemler transfer fonksiyonu formuna konulabilir ve sistem bir transfer fonksiyonu blok diyagramı olarak grafiksel olarak modellenebilir. Alternatif olarak, bir sinyal akış grafiği kullanılabilir.

Fiziksel Sistemlerin Matematiksel Modelleri

- Matematiksel modeller mekanik, elektrik, hidrolik, pnömatik ve termal sistemler gibi farklı fiziksel sistemlerin diferansiyel denklemleri, transfer fonksiyonları, blok diyagramları, sinyal akış grafikleri vb. ile ilgilidir. Dinamik bir sistemin analizi, performansını tahmin etme yeteneğini gerektirir. Bu yetenek ve sonuçların kesinliği, her bir bileşenin özelliklerinin matematiksel olarak ne kadar iyi ifade edilebildiğine bağlıdır.
- Kontrol sistemlerinin analizi ve tasarımında en önemli görevlerden biri sistemlerin matematiksel olarak modellenmesidir. En yaygın iki yöntem transfer fonksiyonu yaklaşımı ve durum denklemleri yaklaşımıdır. Transfer fonksiyonu yöntemi sadece doğrusal zamanla değişmeyen sistemler için geçerlidir, oysa durum denklemleri transfer fonksiyonlarını ve doğrusal durum denklemlerini kullanmak için ilk sıradadır, sistemin önce doğrusallaştırılması veya çalışma aralığının doğrusal bir aralıkla sınırlandırılması gerekir.
- Lineer kontrol sistemlerinin analizi ve tasarımı iyi geliştirilmiş olmasına rağmen, lineer olmayan sistemler için benzerleri genellikle oldukça karmaşıktır.
- Bu nedenle, kontrol sistemleri mühendisinin görevi genellikle yalnızca bir sistemi matematiksel olarak doğru bir şekilde nasıl tanımlayacağını değil, aynı zamanda daha da önemlisi, gerektiğinde sistemin doğrusal olarak yeterince karakterize edilebilmesi için uygun varsayımların ve tahminlerin nasıl yapılacağını belirlemektir. matematiksel model.

Matematiksel ifadelerle sistem oluşturulması

- Lineer Denklemler, Fonksiyonlar, Diferansiyel denklemler
- Simülasyon, Optimizasyon
- Yapay Zeka (Makine Öğrenmesi)
- Bu sistemler giriş ya da çıkışları fiziksel sinyaller olabildiği sayısal vektör ya da matrisler biçiminde de sinyaller olabilmektedir.

Sistemlerin Modellenmesi

Simülasyon

- Simülasyon, gerçek sistemin yapısı ve davranışını anlayabilmek için mantıksal ve matematiksel modelleme ile deney yapma olanağı sağlayan bir yazılımsal programdır.
- Bilgisayar simülasyonu, gerçek veya teorik bir fiziksel sistemin bir matematiksel modelini tasarlama, gerçek dünyada gibi işlevlerini yerine getirme ve çıktısını analiz etme disiplindir. Günümüzde uygulamalı eğitim alanlarında çok yoğun olarak kullanılmaya başlanılmıştır.
- Simülasyon, “gerçek uygulamaları sanal ortamlarda yaparak öğrenme” ilkesini bünyesinde barındırır - sistem hakkında bilgi edinmek için önce bir çeşit model oluşturmalı ve ardından modeli çalıştırmalıyız.
- Simülasyonun Özellikleri:
 - Sistem davranışlarını gözler ve tanımlar.
 - Gözlenen davranışlar için geçerli olan teori ve hipotezleri kurar.
 - Sistem davranışlarını öngörür.
 - Sistemi kontrol etme olanağı sağlar.
 - Simülasyon, karmaşık sistemlerin tasarımı ve analizinde kullanılır.

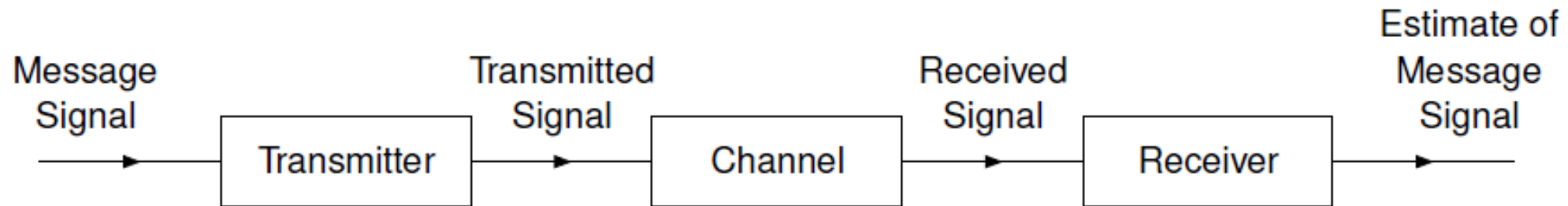
Optimizasyon

- Optimizasyon: İyileştirme ve hassasiyet bulma
- Optimizasyon: Bir sistemi oluşturan bileşenlerindeki değişimlerin duyarlılık etkisini belirlemek amacıyla olası tasarımla arasından daha iyi veya daha uygun bir sistem örneğini bulma sürecidir.
- Parametrelerin duyarlılığına odaklanılır. İstatistiksel veri analiz yöntemlerini kullanır.
- Optimizasyon algoritmaları bir öğrenme setindeki kaybı en aza indirirken, görünmeyen numunelerdeki kayıpları en aza indirmekle ilgilidir.
- Duyarlılık analizi:
- Belirli parametrelerdeki küçük değişikliklere karşı çıkış sinyallerin hassasiyetini belirlemek için kullanılır.
- Tasarım hedeflerinin karşılandığından emin olmak için bir tasarımı tolere edebilir.
- Duyarlılığı belirlemek ve bunu gürültüden ve parametre değerlerindeki büyük ölçekli varyasyonlardan ayırmak için gereken parametre varyasyonlarının dikkatli seçimi yapılır.

Stokastik modeller

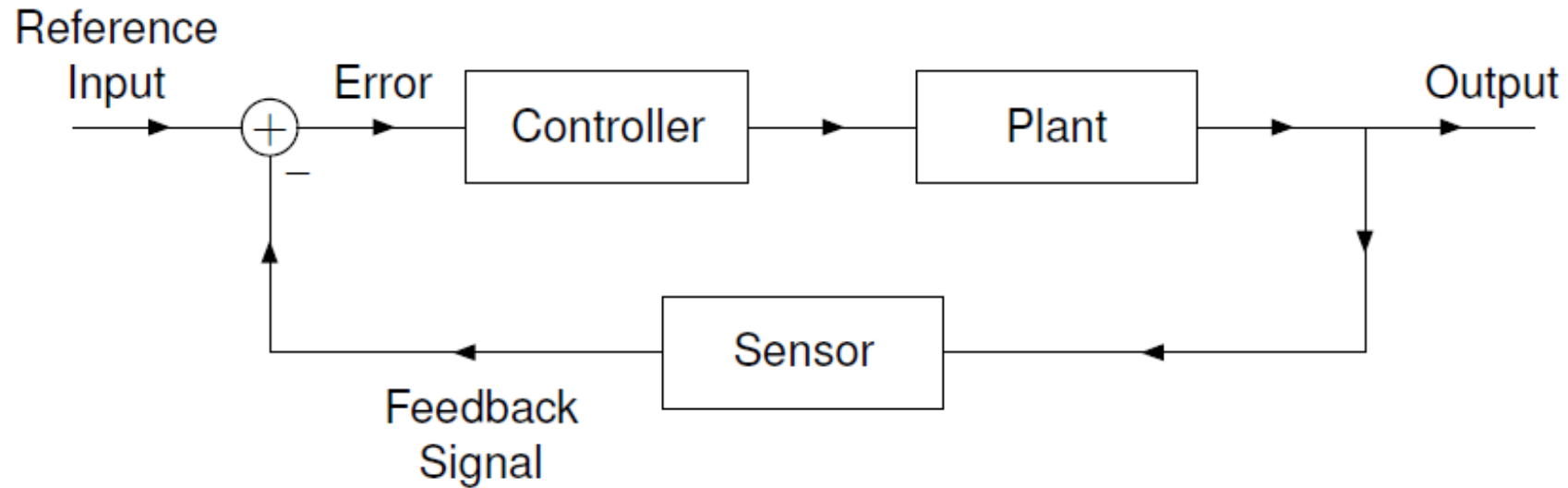
- Stokastik modellerde rastgelelik sistem parametrelerinde, dinamiğinde, girişlerinde olabilir. Dolayısıyla sistemin çıkışı da benzer şekilde bir rastgeleliğe sahip olacaktır. Bu tip sistemlerde aynı şartlar altında aynı deney tekrarlanırsa dahi aynı sonuçlar elde edilmeyebilir ancak sonuçların hangi aralıkta veya hangi dağılımda olacağı, hangi sonucun ortaya çıkma ihtimalinin ne olduğu hesaplanabilir.
- Stokastik modellerde sistemin gelecekteki konumunun bilinmesi yerine tahmin edilmesi ve olasılıklandırılması söz konusudur.
- Makine Öğrenmesi, veri yığınınından öğrenerek karar veren algoritmalar stokastik modellerdir.
- Loto çekilişi, zar atılışı, döviz kurları, borsa gibi sistemleri örnek olarak verebiliriz.

Haberleşme Sistemleri



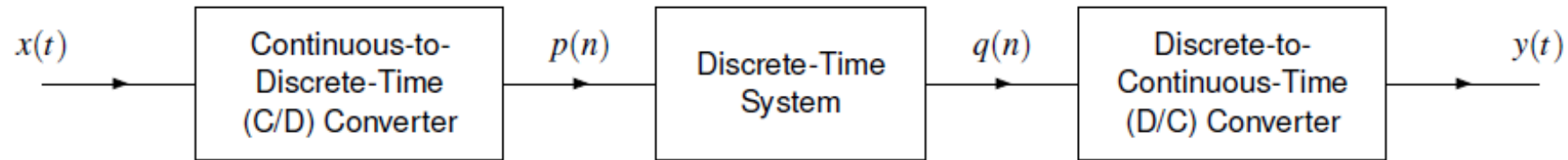
General Structure of a Communication System

Kontrol Sistemleri

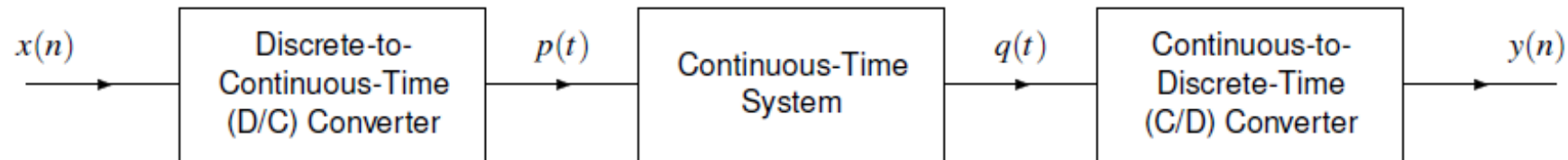


General Structure of a Feedback Control System

Sinyal İşleme Sistemleri



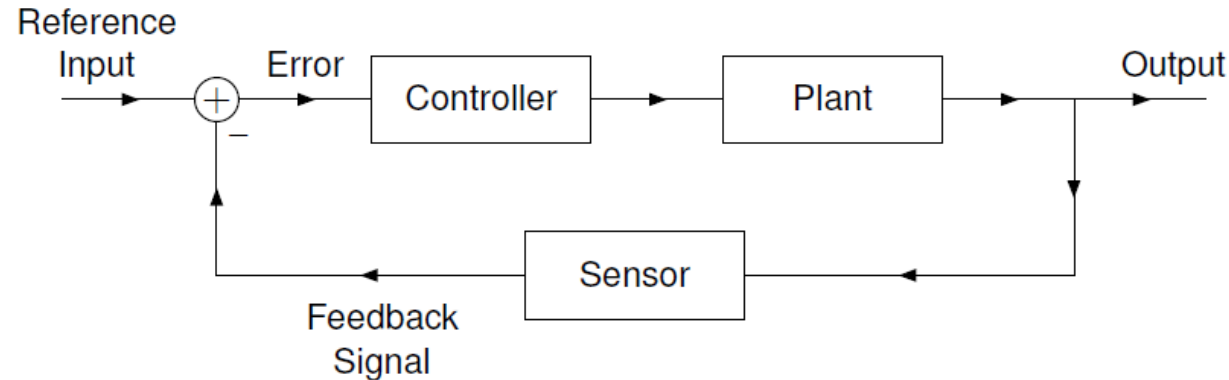
Processing a Continuous-Time Signal With a Discrete-Time System



Processing a Discrete-Time Signal With a Continuous-Time System

Feedback Control Systems

- Input: kontrol edilecek miktarın istenilen değeri
- Çıktı: kontrol edilecek miktarın gerçek değeri
- Hata: istenen ve gerçek değerler arasındaki fark
- Tesis: kontrol edilecek sistem
- Sensör: gerçek çıktıyı ölçmek için kullanılan cihaz
- Denetleyici: hatayı izleyen ve hatayı sıfıra zorlamak amacıyla tesisin girişini değiştiren cihaz
- Çoğu zaman, bir sistemin BIBO'nun kararlı olduğundan emin olmak isteriz.
- BIBO kararlılık özelliği, Laplace alanında zaman alanından daha kolay karakterize edilir.
- Bu nedenle, Laplace alanı, sistemlerin kararlılık analizi için son derece yararlıdır.





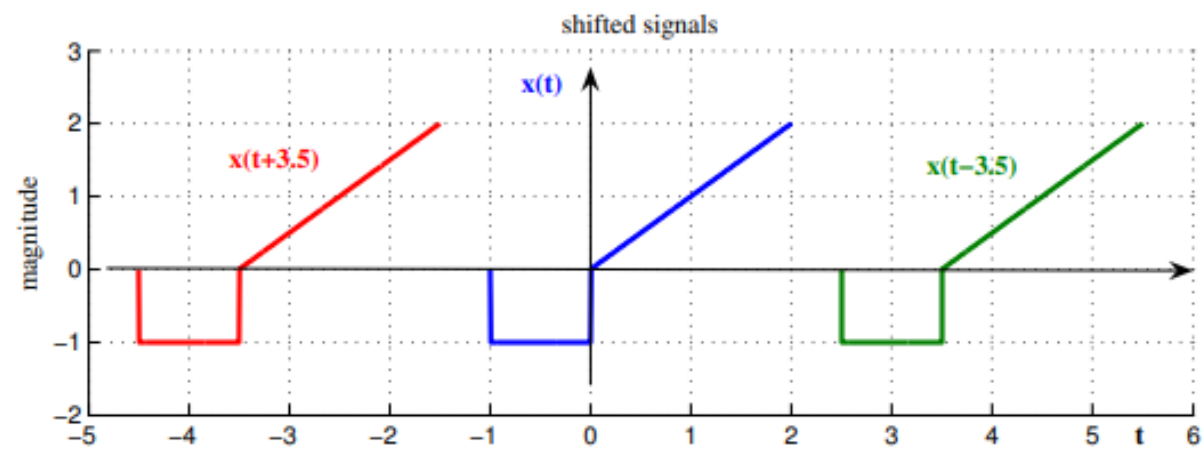
Sinyallerin Matematiksel İfadesi

Operation	CT	DT	Note
Amplitude scaling	$y(t) = cx(t)$	$y[n] = cx[n]$	$c > 1$: gain $c < 1$: atten
Addition	$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$	$y[n] = x_1[n] + x_2[n]$	
Multiplication	$y(t) = x_1(t)x_2(t)$	$y[n] = x_1[n]x_2[n]$	
Differentiation	$y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$	(NO DT case)	
Integration	$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	(NO DT case)	
Time scaling	$y(t) = x(at)$ $\begin{cases} a > 1 : \text{compression} \\ a < 1 : \text{expansion} \end{cases}$	$y[n] = x[kn]$ $k > 0$ and integer only	
Reflection (time reversal)	$y(t) = x(-t)$	$y[n] = x[-n]$	
Time shifting	$y(t) = x(t - t_0)$ $\begin{cases} t_0 > 0 : \text{right shift} \\ t_0 < 0 : \text{left shift} \end{cases}$	$y[n] = x[n - n_0]$ $\begin{cases} n_0 > 0 : \text{right shift} \\ n_0 < 0 : \text{left shift} \end{cases}$	
Combination	$y(t) = x(at - t_0)$	$y[n] = x[kn - n_0]$	

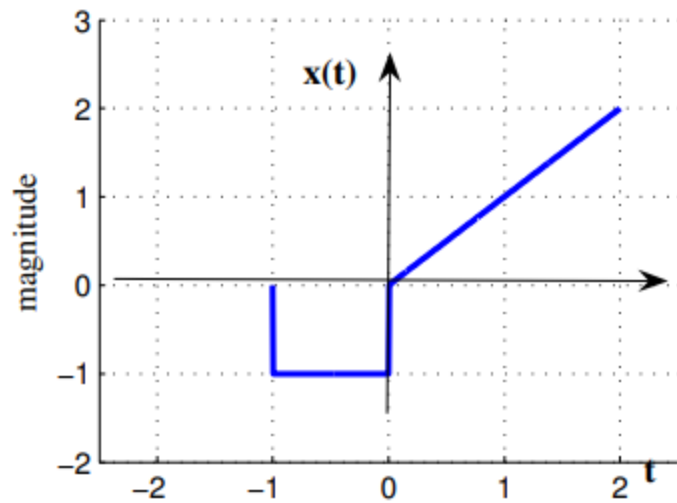
Basic Operations on Signal

$$y(t) = x(t - 3.5) \quad (\text{shifted to the right by } 3.5)$$

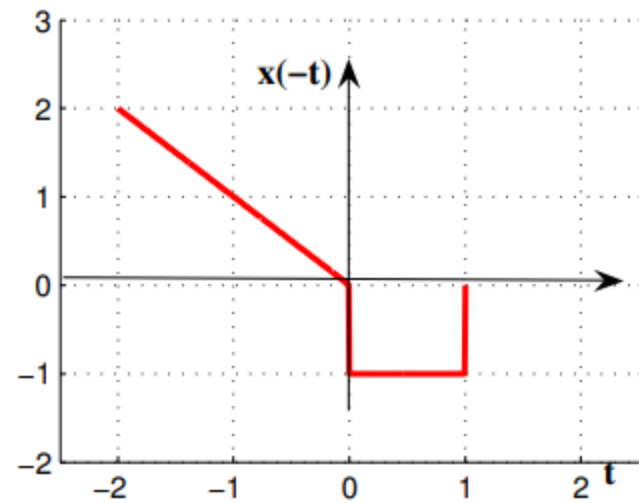
$$y(t) = x(t + 3.5) \quad (\text{shifted to the left by } 3.5).$$



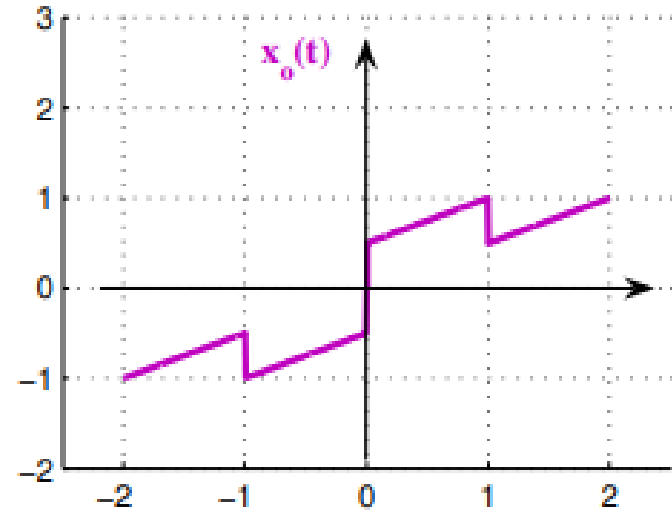
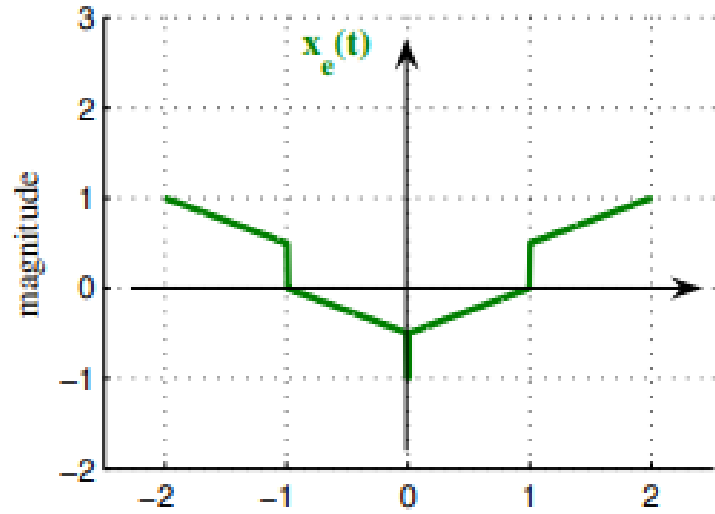
Signal $x(t)$ and its time-shift transforms by ± 3.5 .



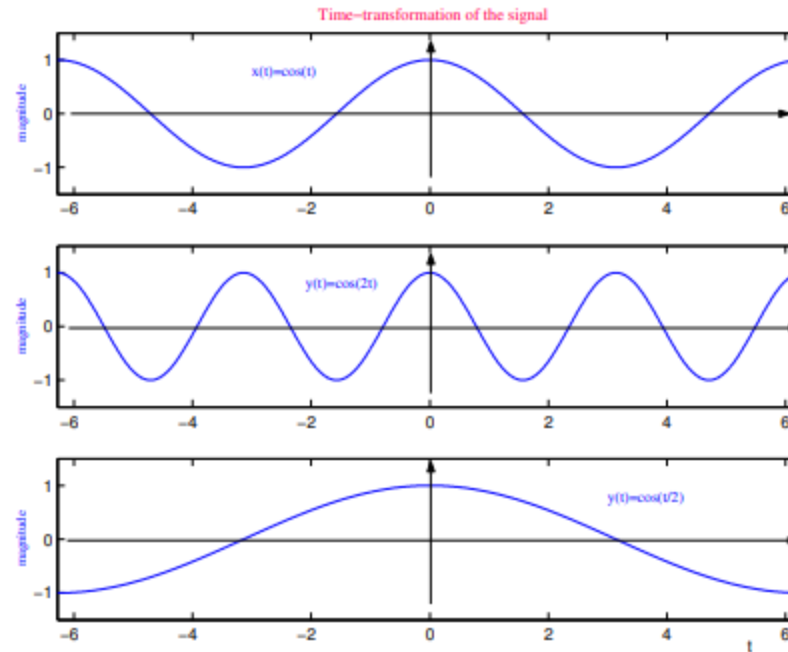
(a)



(b)



Cosine signal $x(t) = \cos(t)$ and time-scaled versions $y(t) = \cos(2t)$ and $y(t) = \cos(t/2)$.



. Cosine signal $x(t) = \cos(t)$ and time-scaled versions $y(t) = \cos(2t)$ and $y(t) = \cos(t/2)$.

Örnek

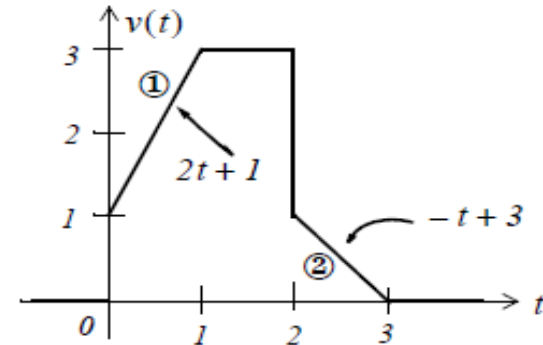


Figure 1.15. Equations for the linear segments of Figure 1.14

Following the same procedure as in the previous examples, we get

$$v(t) = (2t + 1)[u_0(t) - u_0(t - 1)] + 3[u_0(t - 1) - u_0(t - 2)] \\ + (-t + 3)[u_0(t - 2) - u_0(t - 3)]$$

Multiplying the values in parentheses by the values in the brackets, we get

$$v(t) = (2t + 1)u_0(t) - (2t + 1)u_0(t - 1) + 3u_0(t - 1) \\ - 3u_0(t - 2) + (-t + 3)u_0(t - 2) - (-t + 3)u_0(t - 3)$$

or

$$v(t) = (2t + 1)u_0(t) + [-(2t + 1) + 3]u_0(t - 1) \\ + [-3 + (-t + 3)]u_0(t - 2) - (-t + 3)u_0(t - 3)$$

and combining terms inside the brackets, we get

$$v(t) = (2t + 1)u_0(t) - 2(t - 1)u_0(t - 1) - tu_0(t - 2) + (t - 3)u_0(t - 3)$$

Örnek

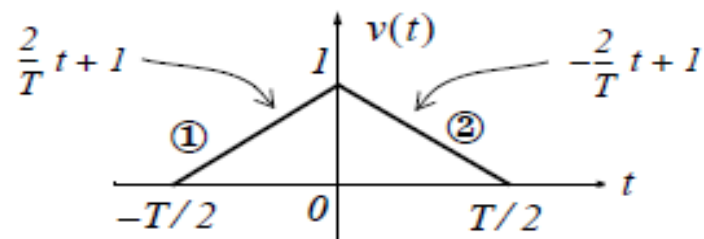


Figure 1.13. Equations for the linear segments of Figure 1.12

For line segment ①,

$$v_1(t) = \left(\frac{2}{T}t + 1\right) \left[u_0\left(t + \frac{T}{2}\right) - u_0(t) \right]$$

and for line segment ②,

$$v_2(t) = \left(-\frac{2}{T}t + 1\right) \left[u_0(t) - u_0\left(t - \frac{T}{2}\right) \right]$$

Combining (1.15) and (1.16), we get

$$\begin{aligned} v(t) &= v_1(t) + v_2(t) \\ &= \left(\frac{2}{T}t + 1\right) \left[u_0\left(t + \frac{T}{2}\right) - u_0(t) \right] + \left(-\frac{2}{T}t + 1\right) \left[u_0(t) - u_0\left(t - \frac{T}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

Örnek

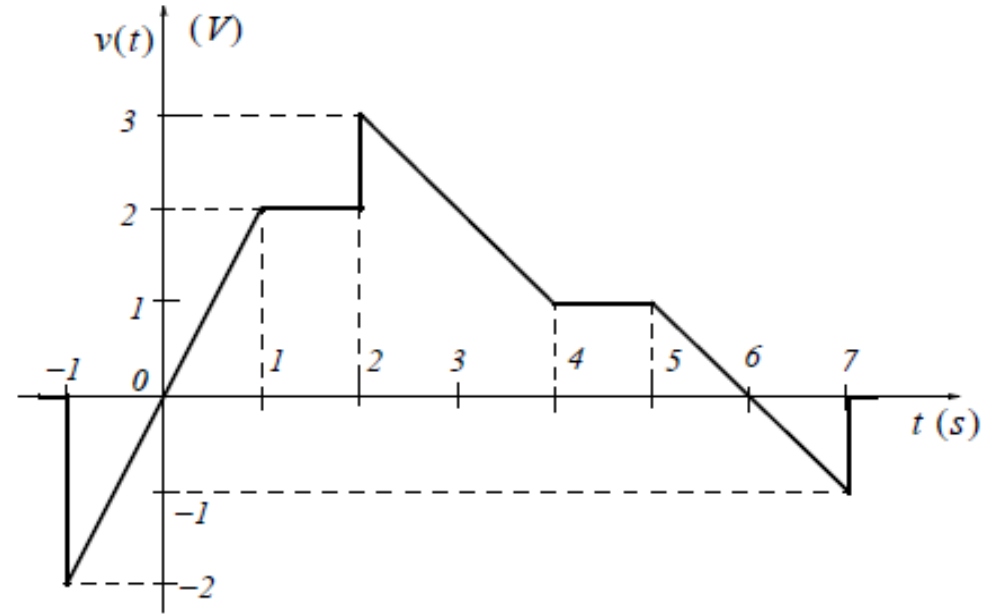


Figure 1.21. Waveform for Example 1.9

Solution:

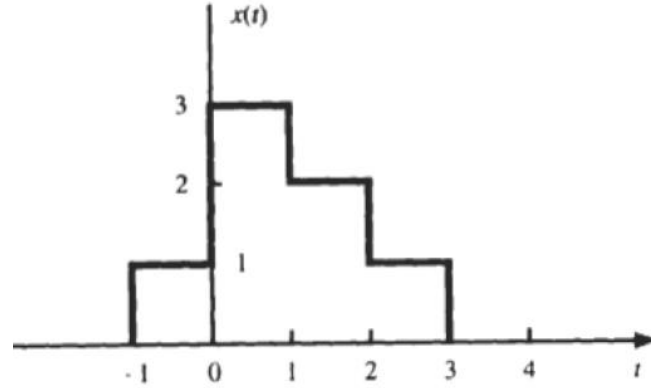
- a. We first derive the equations for the linear segments of the given waveform. These are shown in Figure 1.22.

Next, we express $v(t)$ in terms of the unit step function $u_0(t)$, and we get

$$\begin{aligned} v(t) = & 2t[u_0(t+1) - u_0(t-1)] + 2[u_0(t-1) - u_0(t-2)] \\ & + (-t+5)[u_0(t-2) - u_0(t-4)] + [u_0(t-4) - u_0(t-5)] \\ & + (-t+6)[u_0(t-5) - u_0(t-7)] \end{aligned} \quad (1.52)$$

Örnek:

Soru: Şekil'de gösterilen sinyalleri birim adım fonksiyonları açısından ifade edin.



$$x(t) = u(t+1) + 2u(t) - u(t-1) - u(t-2) - u(t-3)$$

$$x(t) = [u(t+1) - u(t)] + 3[u(t) - u(t-1)] + 2[u(t-1) - u(t-2)] + [u(t-2) - u(t-3)]$$

$$x(t) = u(t+1) - u(t) + 3u(t) - 3u(t-1) + 2u(t-1) - 2u(t-2) + u(t-2) - u(t-3)$$

$$x(t) = u(t+1) + 2u(t) - u(t-1) - u(t-2) - u(t-3)$$

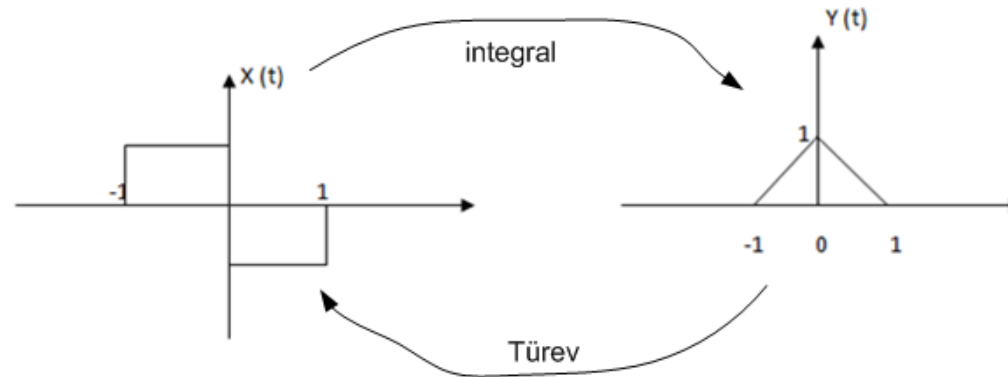
The given pair $x(t)$ and $y(t)$ is related by _____

a) $Y(t) = d/dt (x(t))$

b) $Y(t) = x(t) + 1$

c) $Y(t) = \int x(t) .dt$

d) Not related



View Answer, Answer: c

Explanation: The given pair $x(t)$ and $y(t)$ is related by $Y(t) = \int x(t) .dt$. The integral of $x(t)$ gives the $Y(t)$. $Y(t) = 0$ for $t > 1$.

$x(t)$ ve $y(t)$ sinyallerinin birbirleri ile ilişkisi nedir?

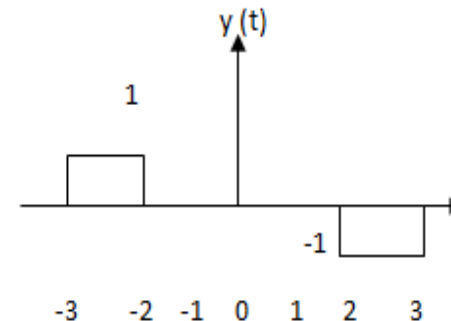
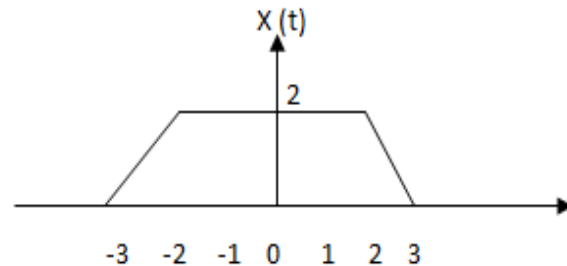
($F_1(t)=at+b$ ve $F_2(t)=c$ ifadelerini göz önüne alınız)

Her iki sinyalin matematiksel ifadesini bulunuz.

İki sinyalin birbiri ile ilişkisi ne olabilir. (Türev, integral, toplama, çarpma, bölme, çıkarma...)

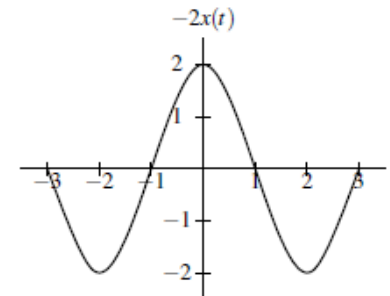
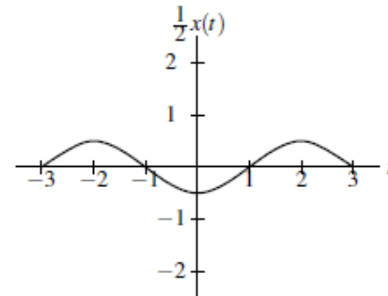
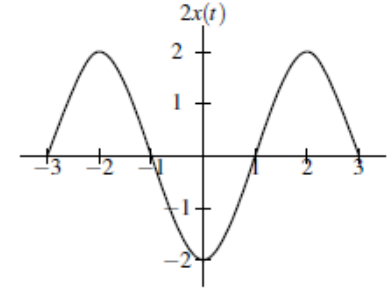
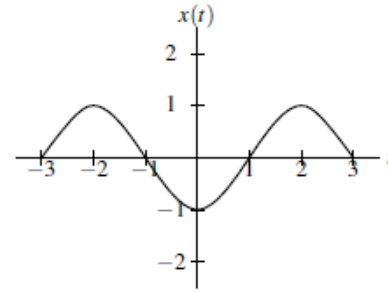
$$Y(t) = d/dt (x(t))$$

Explanation: The given pair $x(t)$ and $y(t)$ is related by $y(t) = d/dt (x(t))$. From -2 to 2 we have $Y(t)$ is zero because differentiation of constant is zero.



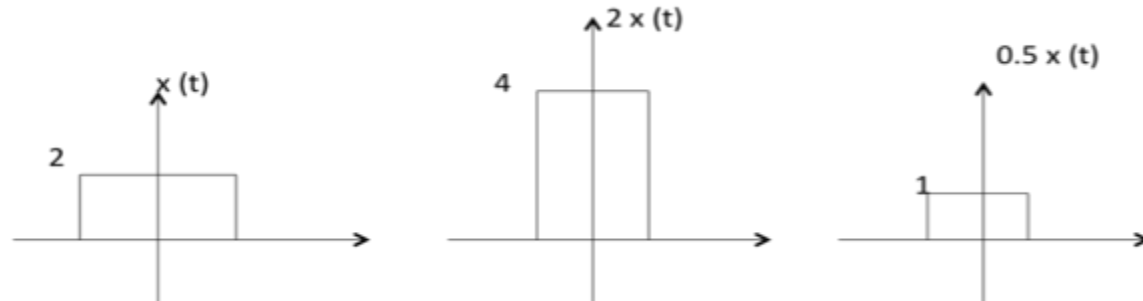
Genlik Ölçeklendirme

- Genlik ölçeklendirme, a 'nın gerçek bir sayı olduğu $y(t) = ax(t)$ ile verildiği gibi, giriş sinyali x 'i çıkış sinyali y 'ye eşler.
- Geometrik olarak, çıktı sinyali y genlik olarak genişletilir ya da sıkıştırılır ve/veya yatay eksen etrafında yansıtılır.



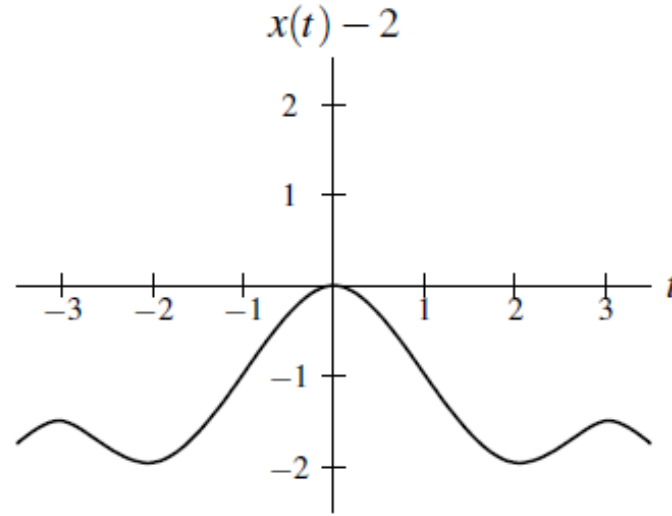
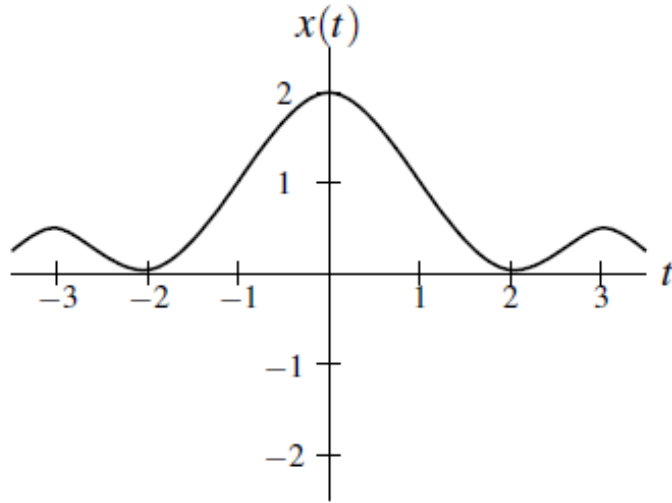
Amplitude Scaling

$C x(t)$ is an amplitude scaled version of $x(t)$ whose amplitude is scaled by a factor C .



Genlik Deęiřimi

- Genlik kayması, $y(t) = x(t) + b$ ile verildiği gibi giriş sinyalinin x çıkış sinyaline y eşler, burada b bir gerçek sayıdır.
- Geometrik olarak, genlik kaydırma, x 'e dikey bir yer deęiřtirme ekler.



Genlik Ölçeklendirme ve Genlik Kaydırma Birleştirilmesi

- Genlik ölçeklendirme ve genlik kaydırma dönüşümlerini de birleştirebiliriz.
- a ve b 'nin gerçak sayılar olduğu, $y(t) = ax(t) + b$ ile verildiği gibi, x giriş sinyalinin y çıkış sinyaline eşleyen bir dönüşümü düşünün.
- Eşdeğer olarak, yukarıdaki dönüşüm $y(t) = a[x(t) + b/a]$ olarak ifade edilebilir.
- Yukarıdaki dönüşüm şuna eşdeğerdir:
 - ilk olarak x 'i a ile ölçeklendiren genlik ve sonra ortaya çıkan sinyali b ile kaydıran genlik; veya
 - ilk genlik x 'i b/a ile kaydırır ve sonra ortaya çıkan sinyali a ile ölçeklendirir.

Addition

Addition of two signals is nothing but addition of their corresponding amplitudes. This can be best explained by using the following example:

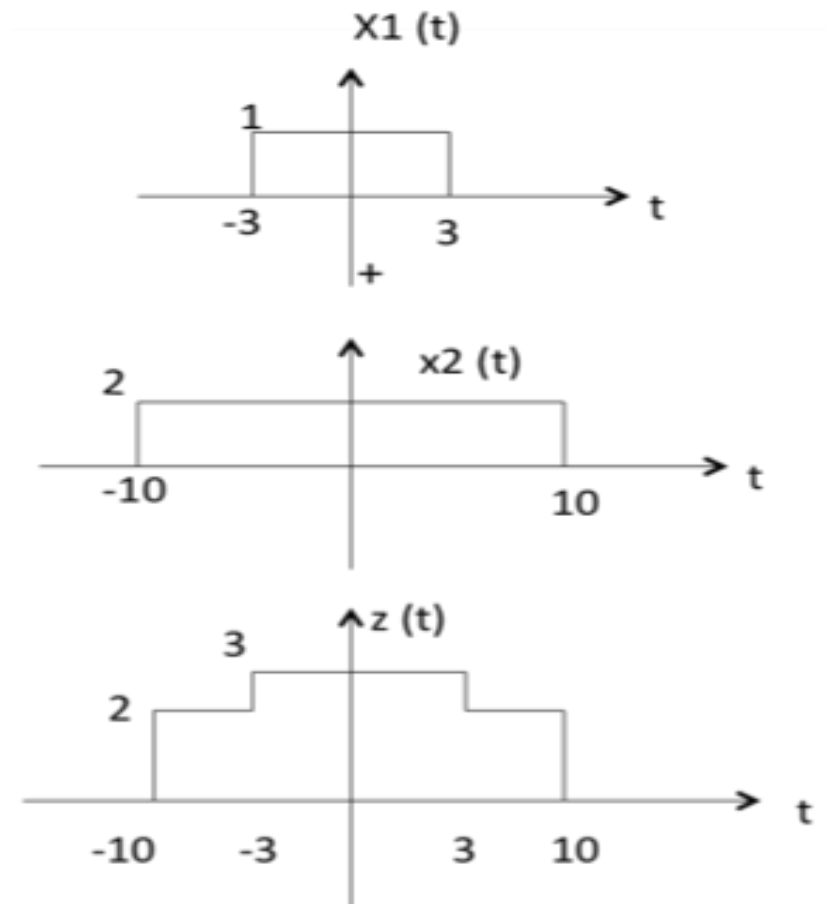
$$z(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

As seen from the diagram above,

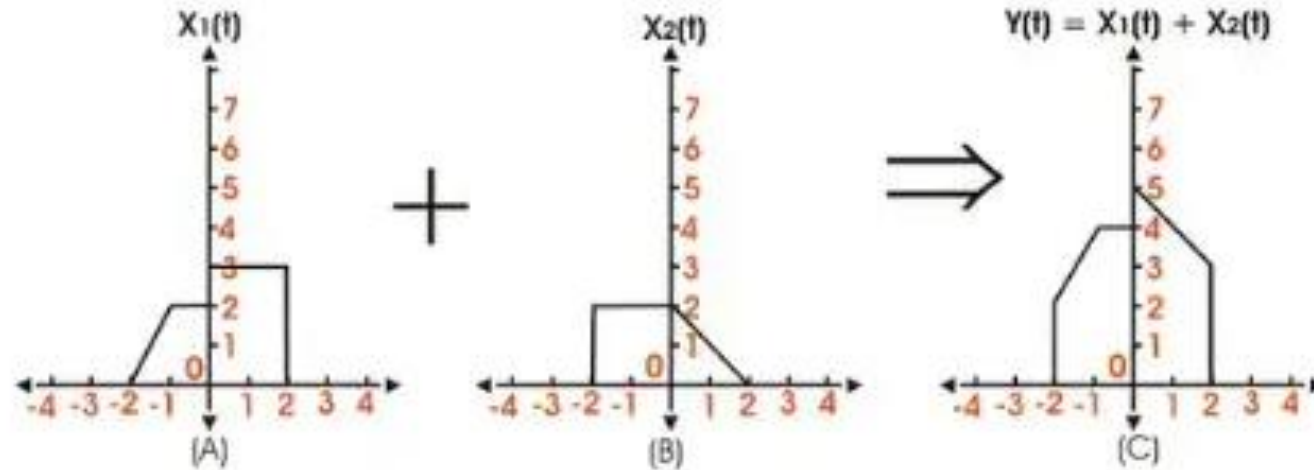
$$-10 < t < -3 \text{ amplitude of } z(t) = x_1(t) + x_2(t) = 0 + 2 = 2$$

$$-3 < t < 3 \text{ amplitude of } z(t) = x_1(t) + x_2(t) = 1 + 2 = 3$$

$$3 < t < 10 \text{ amplitude of } z(t) = x_1(t) + x_2(t) = 0 + 2 = 2$$



Addition



Subtraction

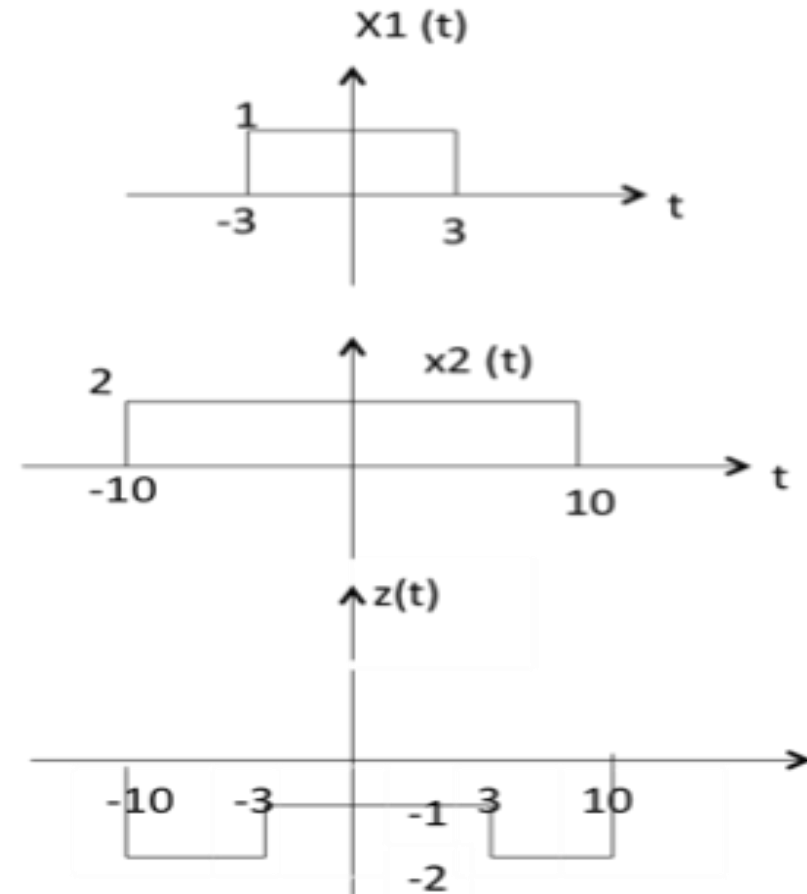
subtraction of two signals is nothing but subtraction of their corresponding amplitudes. This can be best explained by the following example:

As seen from the diagram above,

$-10 < t < -3$ amplitude of $z(t) = x_1(t) - x_2(t) = 0 - 2 = -2$

$-3 < t < 3$ amplitude of $z(t) = x_1(t) - x_2(t) = 1 - 2 = -1$

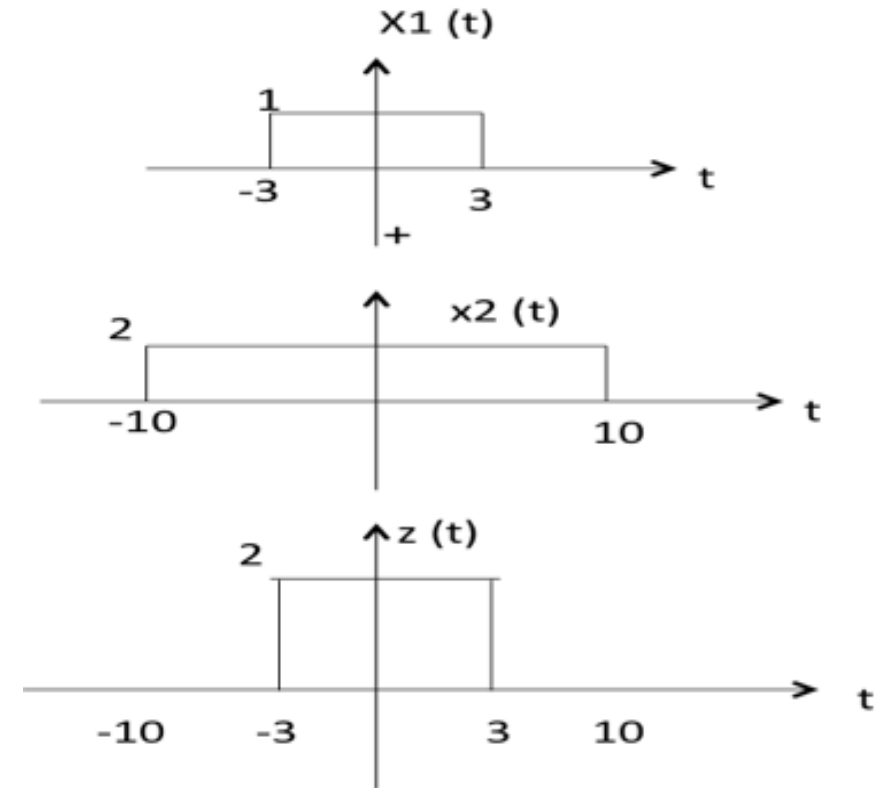
$3 < t < 10$ amplitude of $z(t) = x_1(t) - x_2(t) = 0 - 2 = -2$



Multiplication

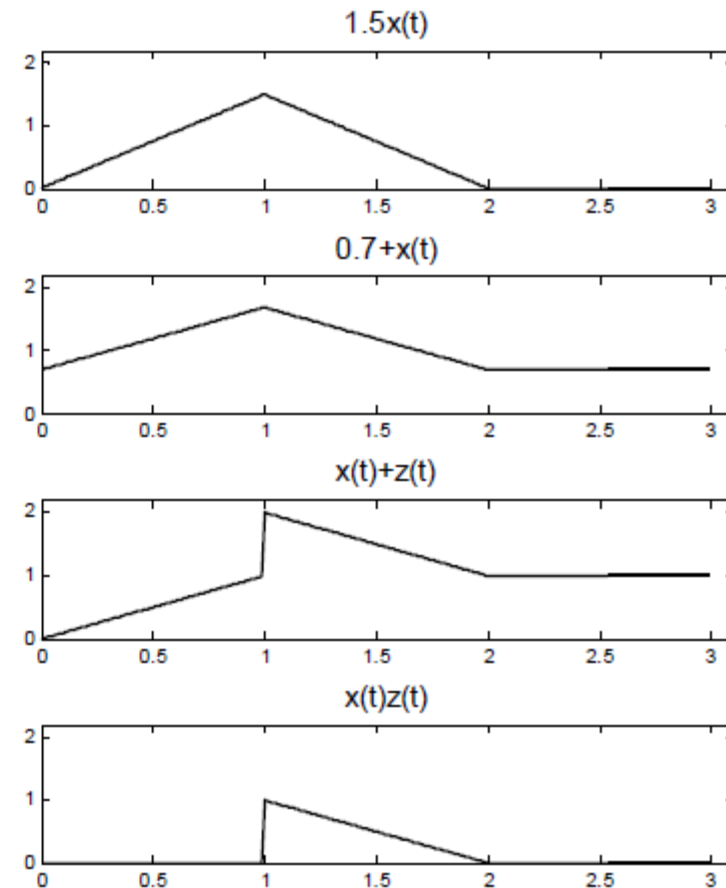
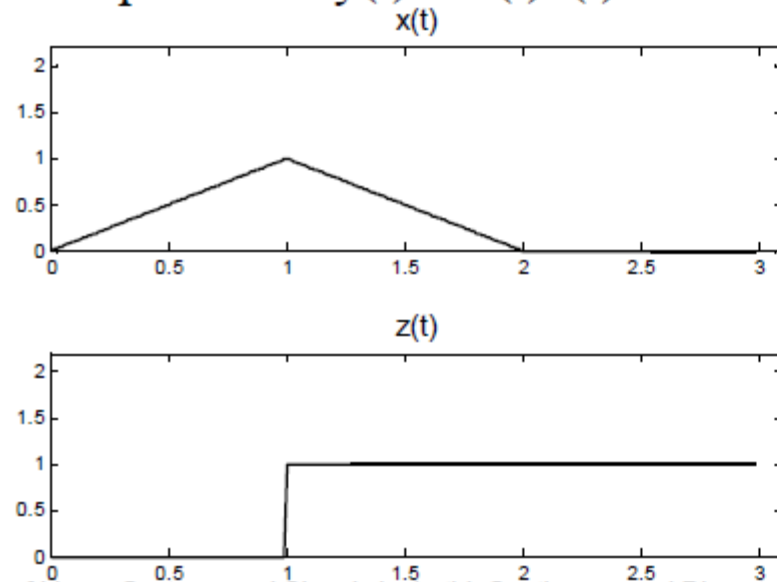
Multiplication of two signals is nothing but multiplication of their corresponding amplitudes. This can be best explained by the following example:

As seen from the diagram above,
 $-10 < t < -3$ amplitude of $z(t) = x_1(t) \times x_2(t) = 0 \times 2 = 0$
 $-3 < t < 3$ amplitude of $z(t) = x_1(t) \times x_2(t) = 1 \times 2 = 2$
 $3 < t < 10$ amplitude of $z(t) = x_1(t) \times x_2(t) = 0 \times 2 = 0$



Elementary Operations on Signals

- Amplitude Scale: $y(t) = ax(t)$, where a is a real (or possibly complex) constant.
- Amplitude Shift: $y(t) = x(t) + b$, where b is a real (or possibly complex) constant
- Addition: $y(t) = x(t) + z(t)$
- Multiplication: $y(t) = x(t)z(t)$



Consider a CT signal $x(t)$ defined as follows:

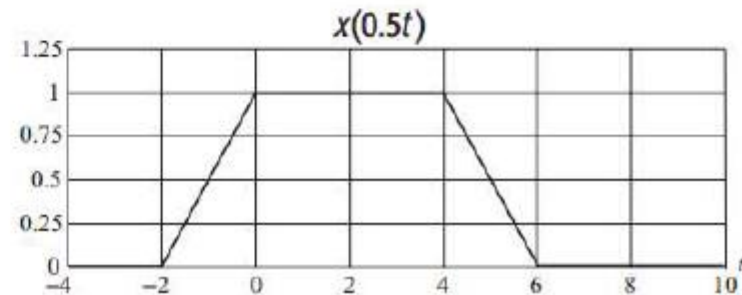
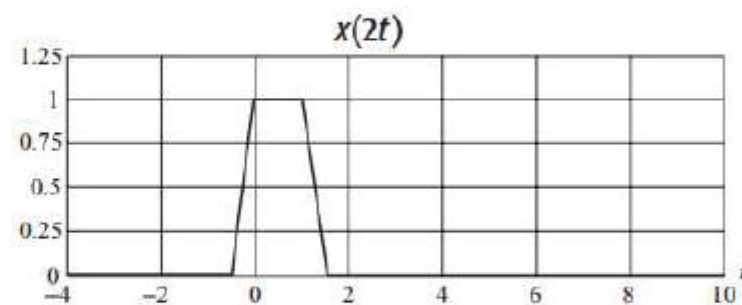
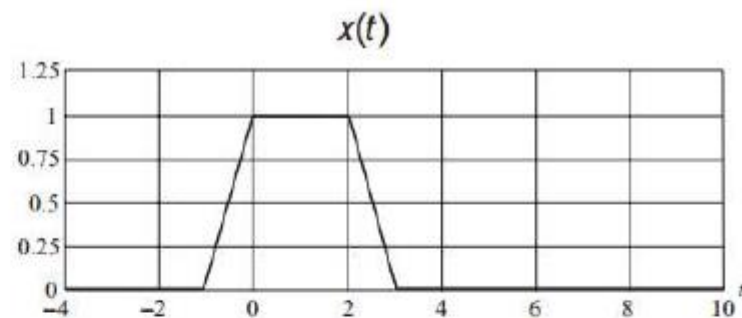
$$x(t) = \begin{cases} t+1 & -1 \leq t \leq 0 \\ 1 & 0 \leq t \leq 2 \\ -t+3 & 2 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{elsewhere,} \end{cases} \quad (1.53)$$

as plotted in Fig. 1.25(a). Determine the expressions for the time-scaled signals $x(2t)$ and $x(t/2)$. Sketch the two signals.

Solution

$$x(2t) = \begin{cases} 2t+1 & -0.5 \leq t \leq 0 \\ 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ -2t+3 & 1 \leq t \leq 1.5 \\ 0 & \text{elsewhere,} \end{cases}$$

$$x(t/2) = \begin{cases} t/2+1 & -2 \leq t \leq 0 \\ 1 & 0 \leq t \leq 4 \\ -t/2+3 & 4 \leq t \leq 6 \\ 0 & \text{elsewhere,} \end{cases}$$



Example

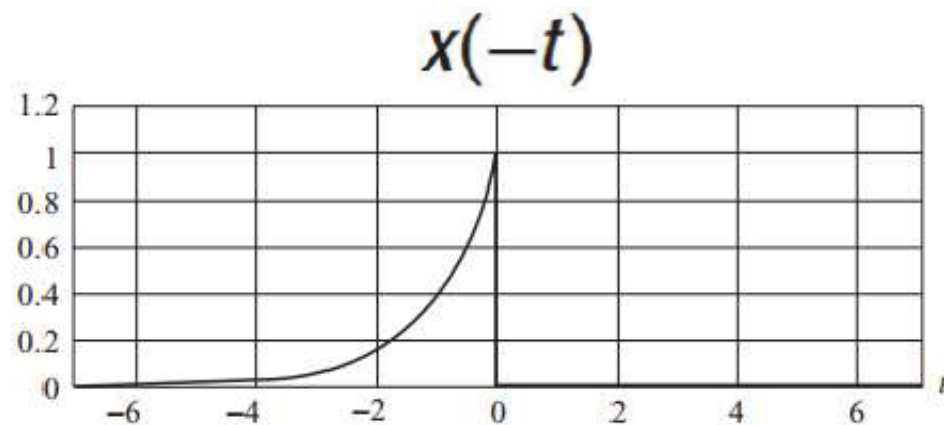
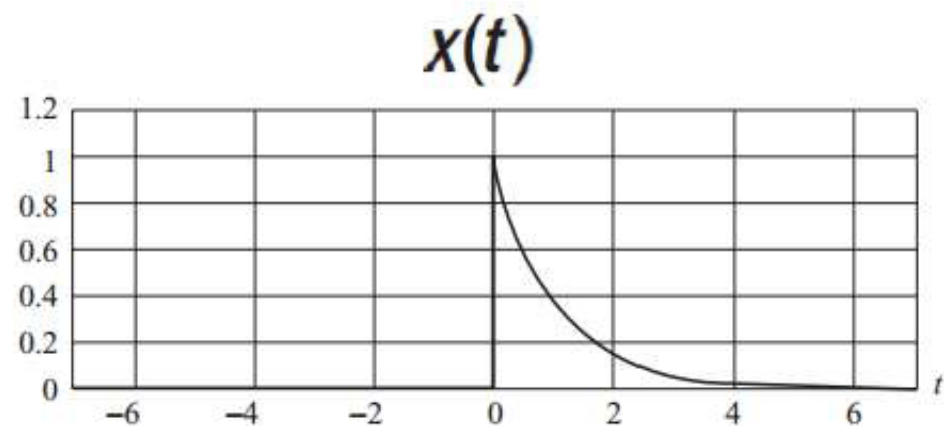
Sketch the time-inverted version of the causal decaying exponential signal

$$x(t) = e^{-t}u(t) = \begin{cases} e^{-t} & t \geq 0 \\ 0 & \text{elsewhere,} \end{cases} \quad (1.56)$$

which is plotted in Fig. 1.28(a).

Solution

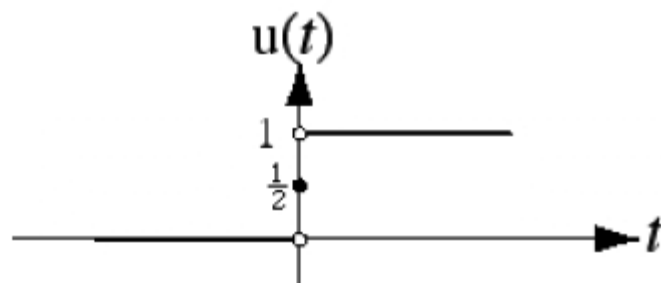
$$x(-t) = \begin{cases} e^t & t \leq 0 \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases}$$



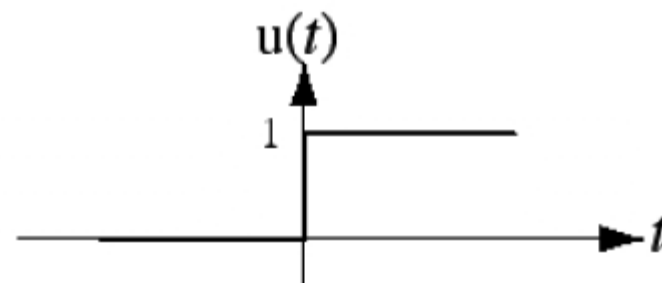
The CT Unit Step Function

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Precise Graph



Commonly-Used Graph

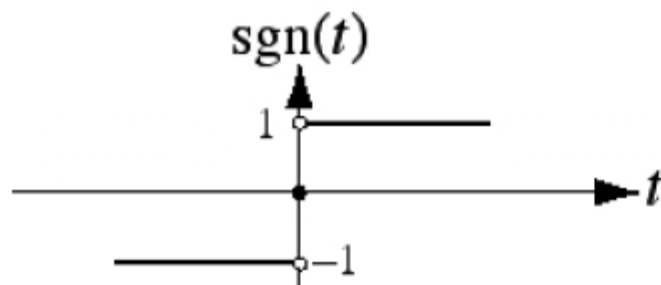


The product signal, $g(t)u(t)$, can be thought of as the signal, $g(t)$, “turned on” at time, $t = 0$.

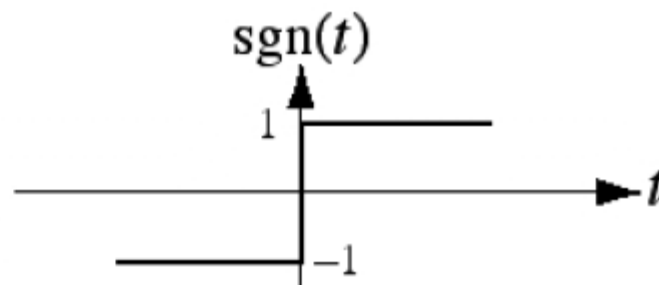
The CT Signum Function

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & , t > 0 \\ 0 & , t = 0 \\ -1 & , t < 0 \end{cases} = 2u(t) - 1$$

Precise Graph



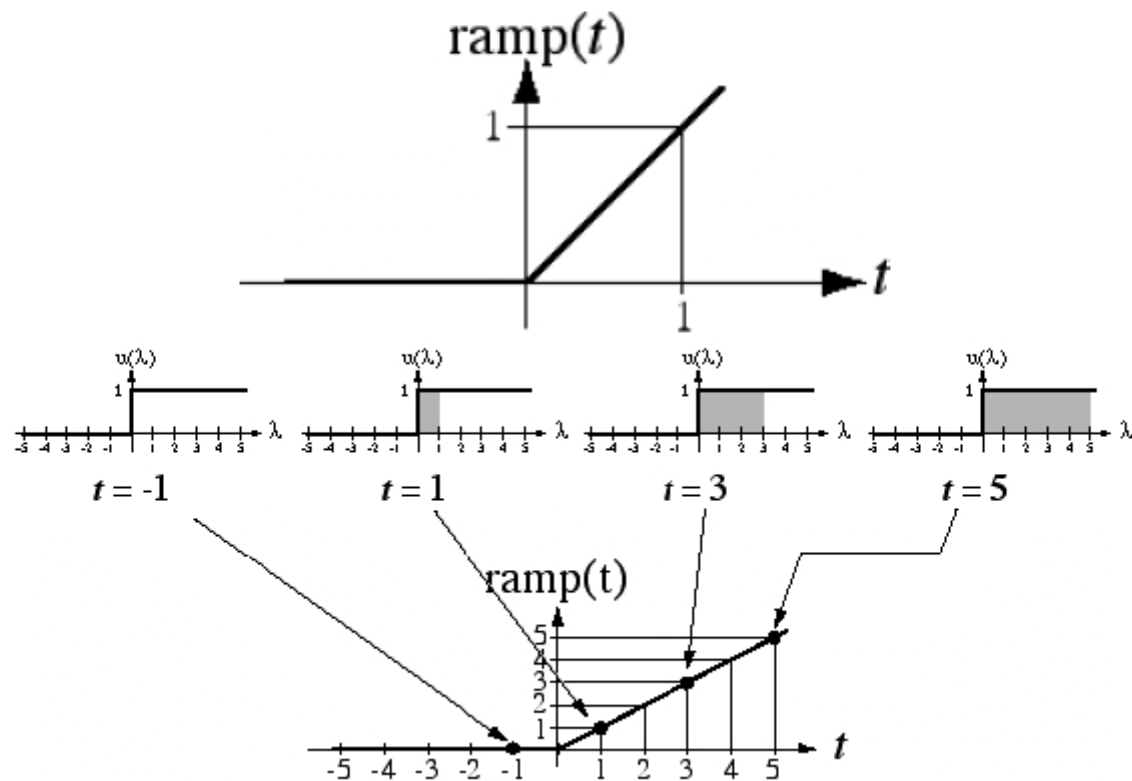
Commonly-Used Graph



The signum function, in a sense, returns an indication of the sign of its argument.

The CT Unit Ramp Function

$$\text{ramp}(t) = \begin{cases} t & , t > 0 \\ 0 & , t \leq 0 \end{cases} = \int_{-\infty}^t u(\lambda) d\lambda = t u(t)$$



Representation of Discrete Signal

$$x(n) = \begin{cases} 1, & \text{for } n = 1, 3 \\ 4, & \text{for } n = 2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

n	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
$x(n)$...	0	0	0	1	4	1	0	0	...

Functional representation

Tabular representation

$$x(n) = \{ \dots, 0, \mathbf{0}, 1, 4, 1, 0, 0, \dots \}$$

infinite – duration signal

$$x(n) = \{ \mathbf{0}, -2, 1, 4, -1, \}$$

finite – duration signal

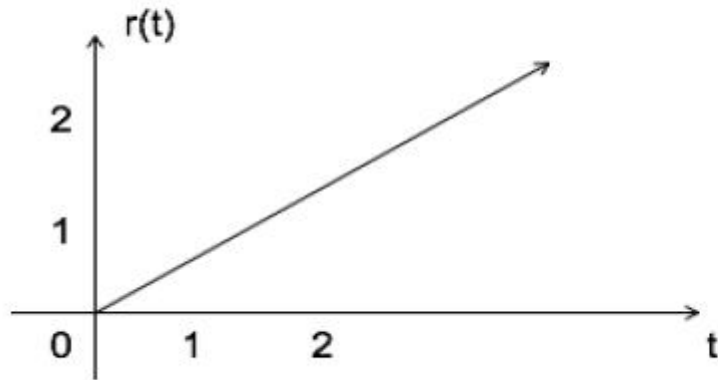
Filter

Örnek: Filter

- Frekans domeniinde indislenmiş ayrık sinyal değerleri, $n=1,2, \dots, 10$ aşağıda verilmiştir.
- $X[n]=[7, 2, 1, 2,2,2,2, 10, 4, 7]$
- $Y[n]=[0, 0, 0, 2,2,2,2, 0, 0, 0]$
- $X[n]$ girişi $Y[n]$ filtre girişi ile çarpıldığında çıkış $Z[n]$ ne olur?

Ramp Signal

Ramp signal is denoted by $r(t)$, and it is defined as $r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$



$$\int u(t) = \int 1 = t = r(t)$$

$$u(t) = \frac{dr(t)}{dt}$$

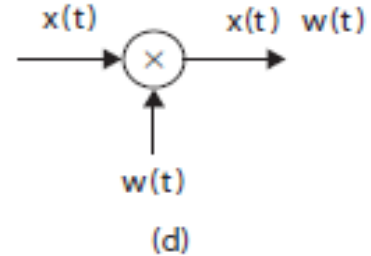
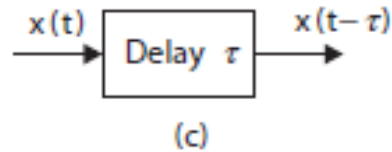
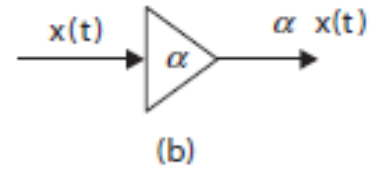
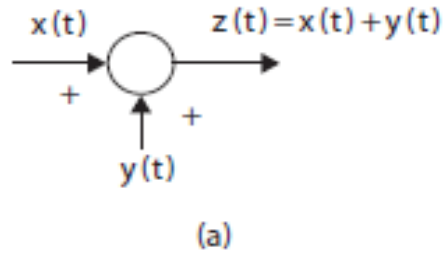


Sistemlerin Blok Diyagram Gösterimi

Sistemlerin Matematiksel Model Gösterimi

Karmaşık sistemler oluşturmak için birbirine bağlanabilen bazı temel yapı taşlarının tanımlanması gerekir.

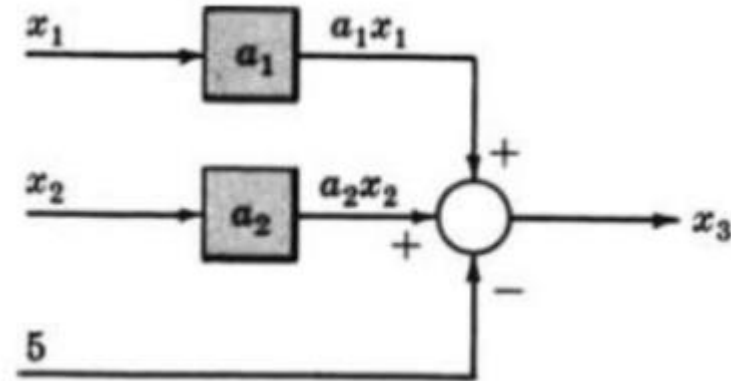
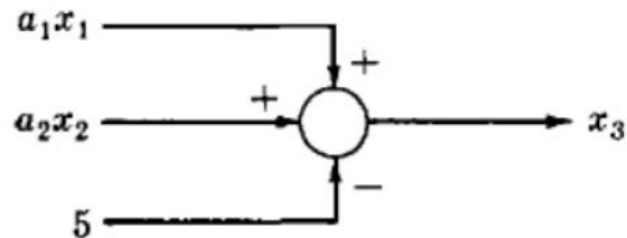
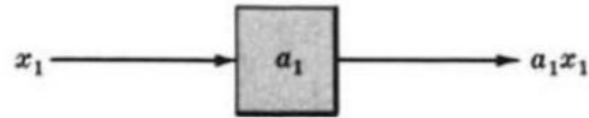
Diagrams of basic signal operations: (a) adder, (b) constant multiplier, (c) delay, and (d) time windowing or modulation.



Example-1

Consider the following equations in which x_1 , x_2 , x_3 , are variables, and a_1 , a_2 are general coefficients or mathematical operators.

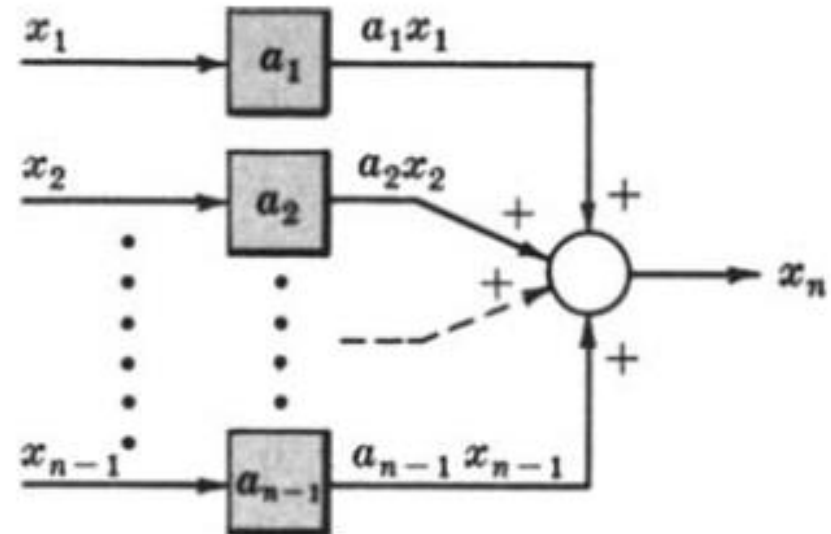
$$x_3 = a_1x_1 + a_2x_2 - 5$$



Example

- Consider the following equations in which x_1, x_2, \dots, x_n , are variables, and a_1, a_2, \dots, a_n , are general coefficients or mathematical operators.

$$x_n = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_{n-1} x_{n-1}$$



Örnek

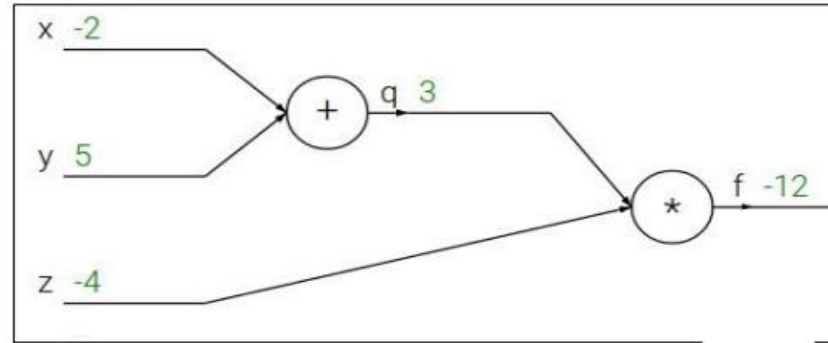
$$f(x, y, z) = (x + y)z$$

$$\text{e.g. } x = -2, y = 5, z = -4$$

$$q = x + y \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 1, \frac{\partial q}{\partial y} = 1$$

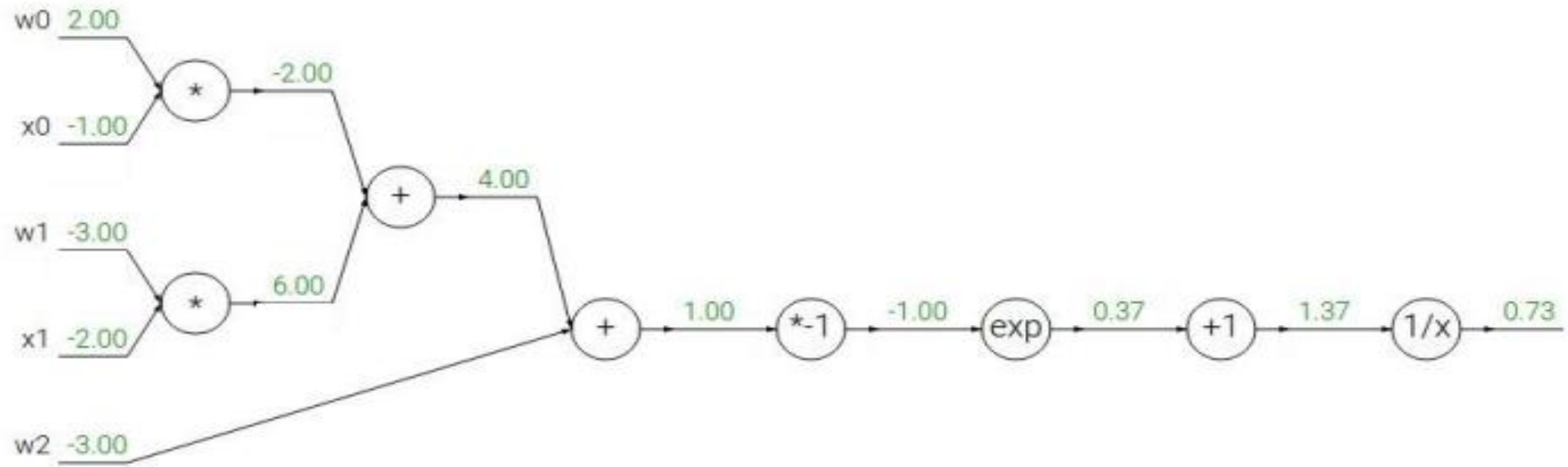
$$f = qz \quad \frac{\partial f}{\partial q} = z, \frac{\partial f}{\partial z} = q$$

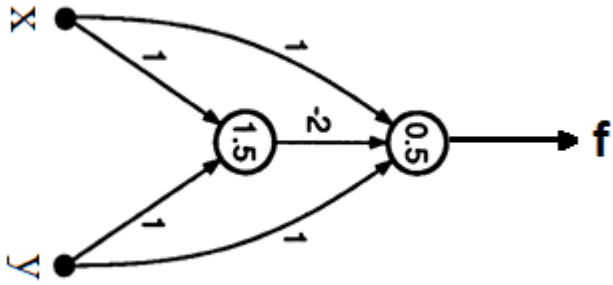
$$\text{Want: } \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$$



Örnek

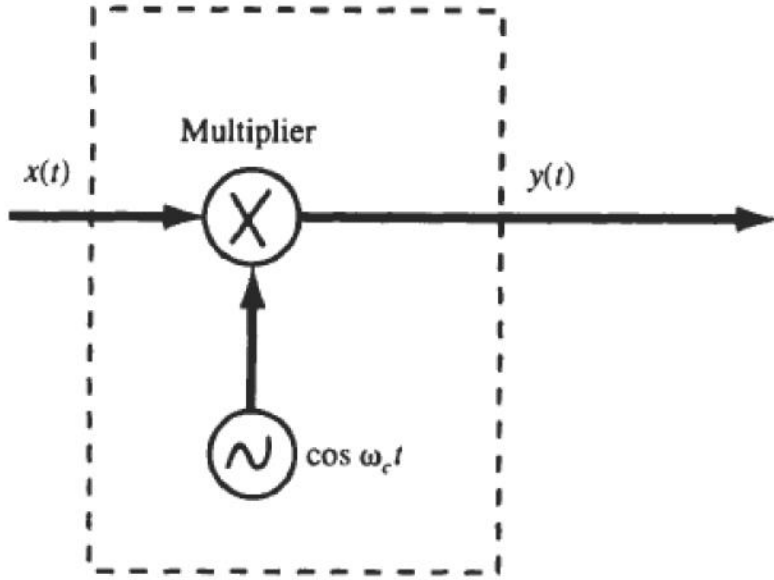
example: $f(w, x) = \frac{1}{1 + e^{-(w_0x_0 + w_1x_1 + w_2)}}$





- Daire içindeki değerler belirleyici hiperparametredir. Toplanır.
- $f = -2(x + y + 1.5) + x + y + 0.5$

Uygulama-1



$$y(t) = x(t) \cos(\omega_c t)$$

- Sistem bellekli mi?
- Sistem nedensel mi?
- Sistem lineer mi?
- Zamanla değişir mi (time-invariant)?
- Kararlı mı?

- Sistem belleksiz. Çıktının $y(t)$ değeri yalnızca $x(t)$ girişinin mevcut değerlerine bağlı olduğundan, sistem hafızasızdır.
- $t=5$, $y(5) = x(5) \cos(\omega_c t)$; Çıktı $y(t)$, $x(t)$ girdisinin gelecekteki değerlerine bağlı olmadığından, sistem nedenseldir.

- (d) Let $y_1(t)$ be the output produced by the shifted input $x_1(t) = x(t - t_0)$. Then

$$y_1(t) = T\{x(t - t_0)\} = x(t - t_0) \cos \omega_c t$$

But $y(t - t_0) = x(t - t_0) \cos \omega_c (t - t_0) \neq y_1(t)$. Hence, the system is **not time-invariant**.

- (e) Since $|\cos \omega_c t| \leq 1$, we have

$$|y(t)| = |x(t) \cos \omega_c t| \leq |x(t)|$$

Thus, if the input $x(t)$ is bounded, then the output $y(t)$ is also bounded and the system is **BIBO stable**.

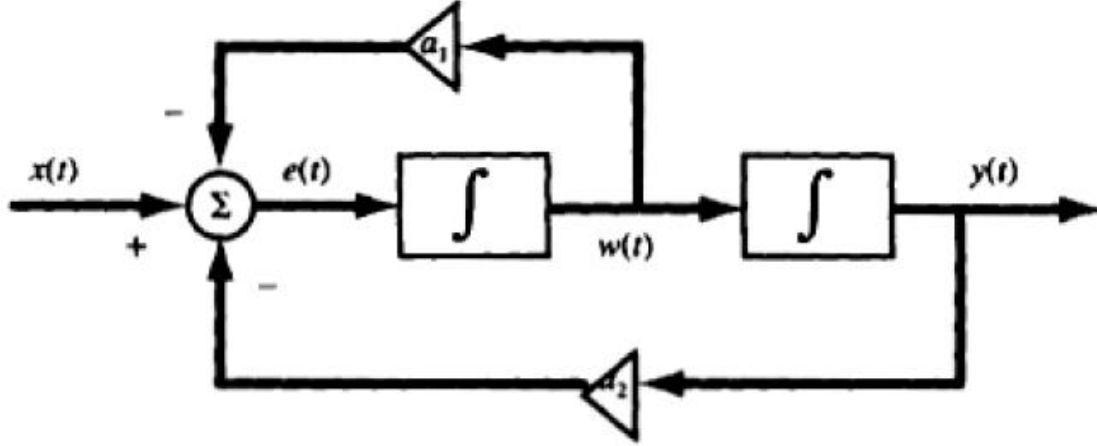
- (c) Let $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$. Then

$$\begin{aligned} y(t) &= [\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)] \cos \omega_c t \\ &= \alpha_1 x_1(t) \cos \omega_c t + \alpha_2 x_2(t) \cos \omega_c t \\ &= \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \end{aligned}$$

Thus, the system is **linear**.

Uygulama-2

Sürekli zaman sistemi, iki entegratörden ve iki skaler çarpandan oluşur. Çıktı $y(t)$ ve giriş $x(t)$ ile ilişkilendiren bir diferansiyel denklem yazın.



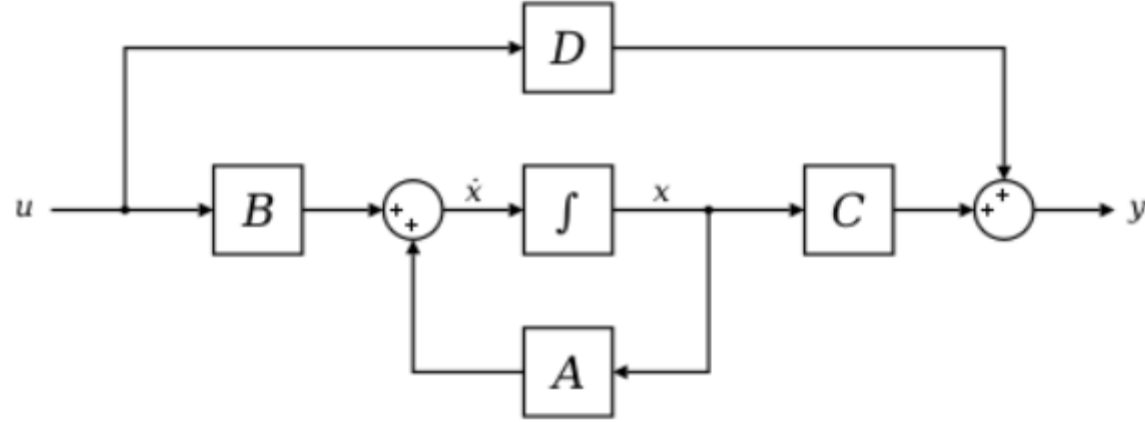
$$e(t) = \frac{dw(t)}{dt} = -a_1 w(t) - a_2 y(t) + x(t)$$

$$w(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -a_1 \frac{dy(t)}{dt} - a_2 y(t) + x(t)$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = x(t)$$

Doğrusal durum uzayı denklemlerinin blok diyagram gösterimi

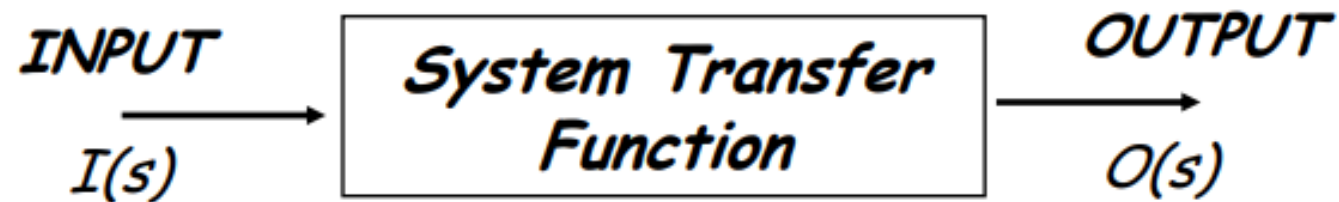
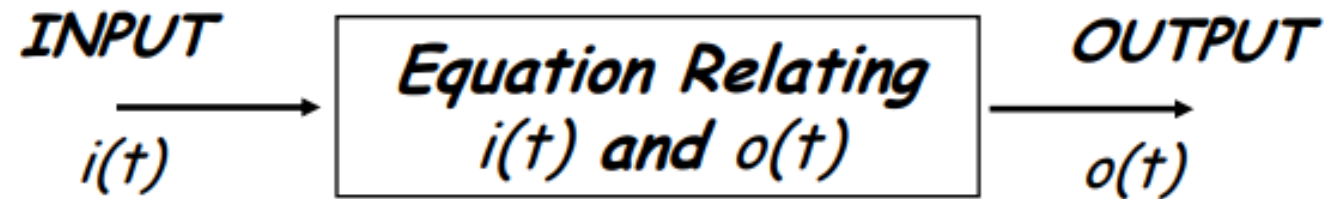


$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$$

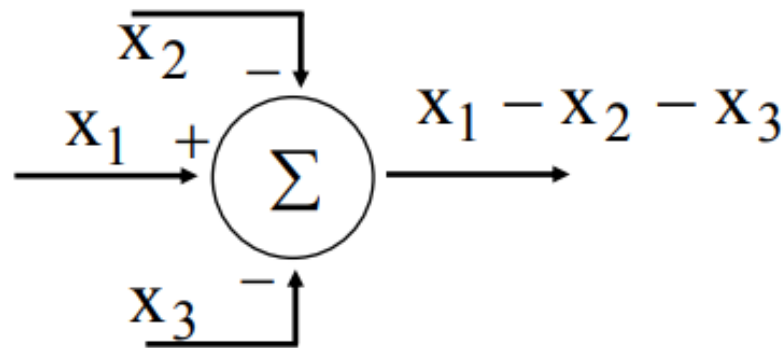
Block Diagram Representation

Representation of a system in terms of discrete blocks that represent part of a system.

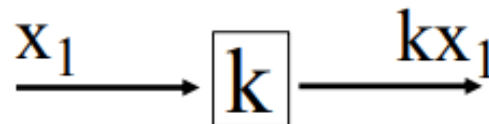


Block Diagram Representation

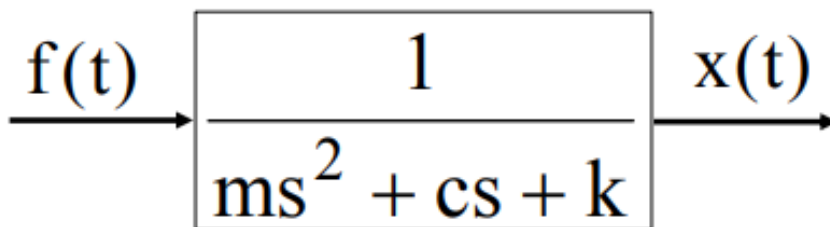
Summing Junction - Used to sum signals together



Constant Gain - Scalar multiplier



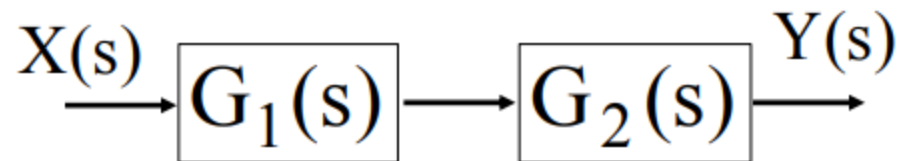
Transfer Function - Given a system with zero initial conditions, the transfer function is the ratio of output due to input



Block Diagram Representation

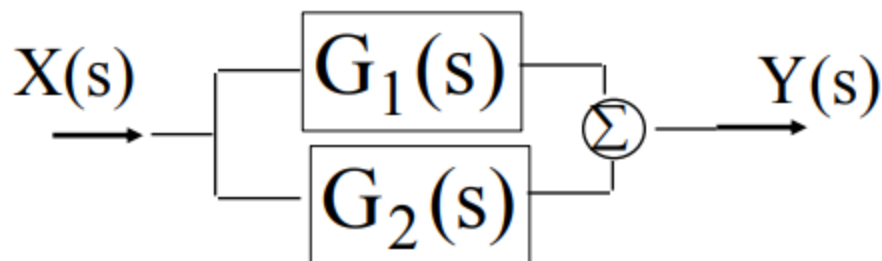
T.F. Series

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G_2(s)G_1(s)$$

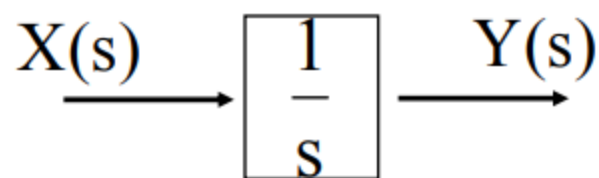
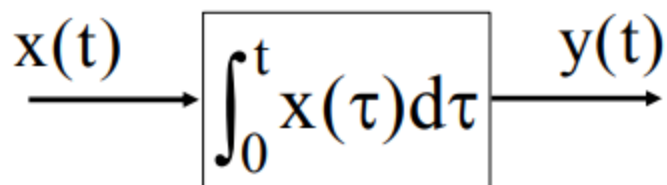


T.F. Parallel

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G_2(s) + G_1(s)$$

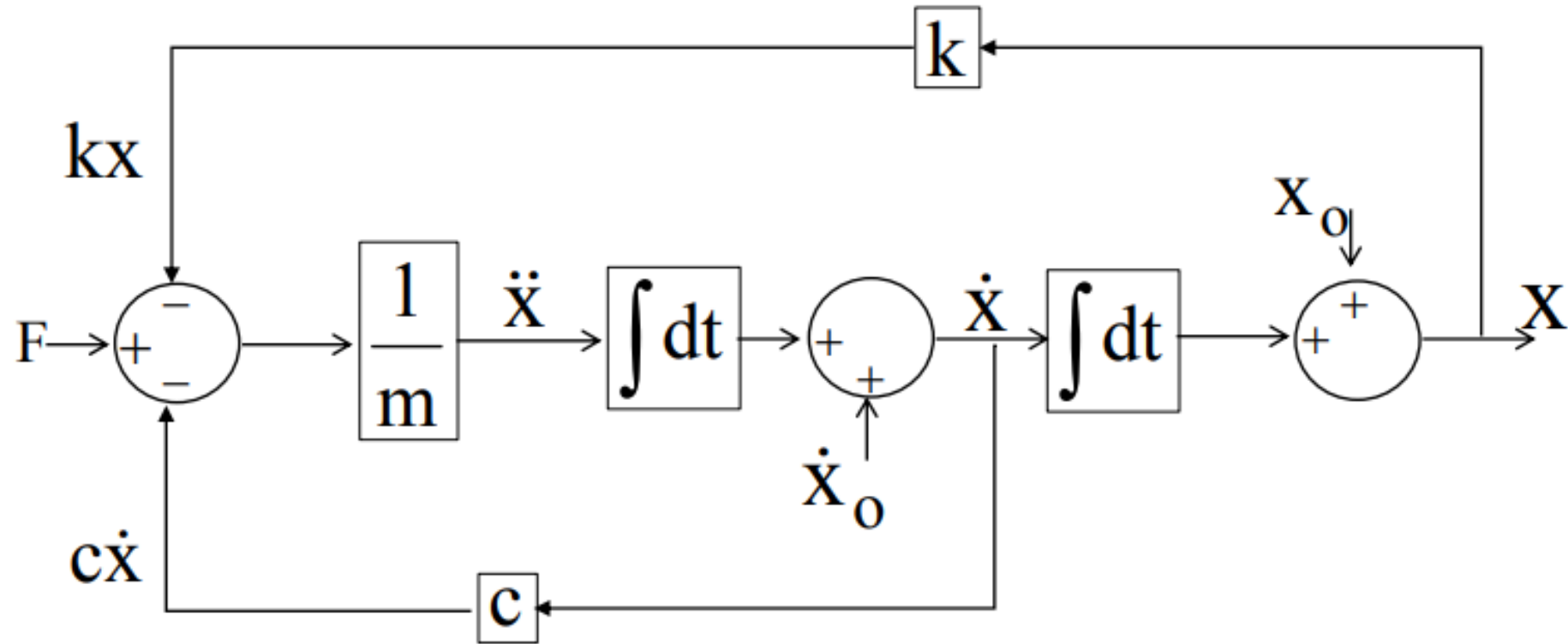


Integration

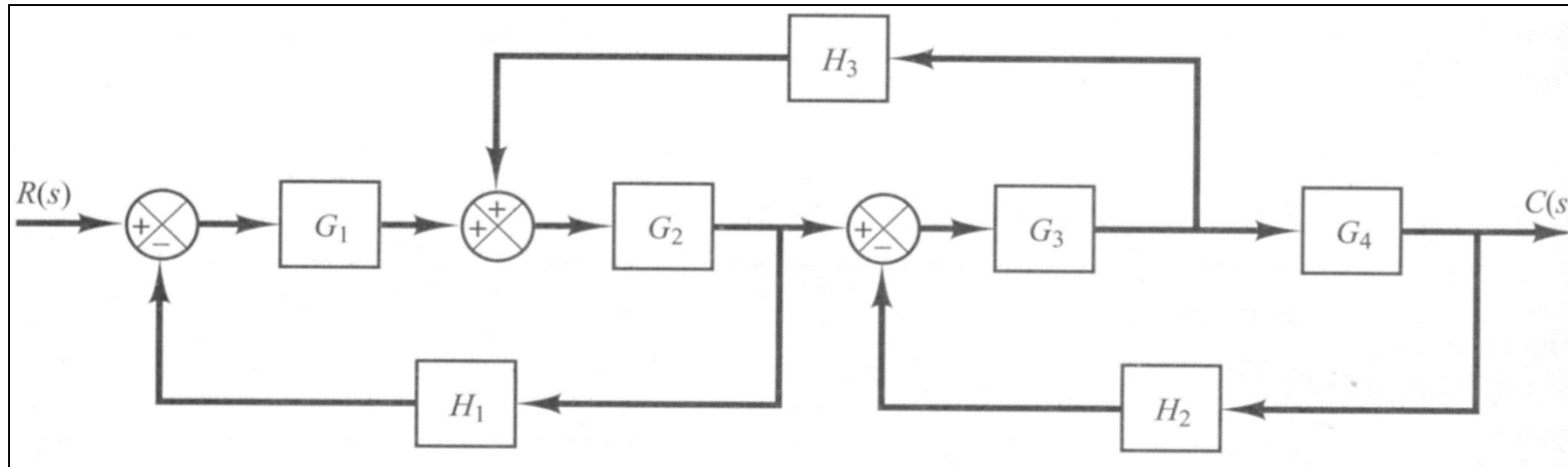


An analog block diagram for a single DOF system

$$F - kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$



Control Systems

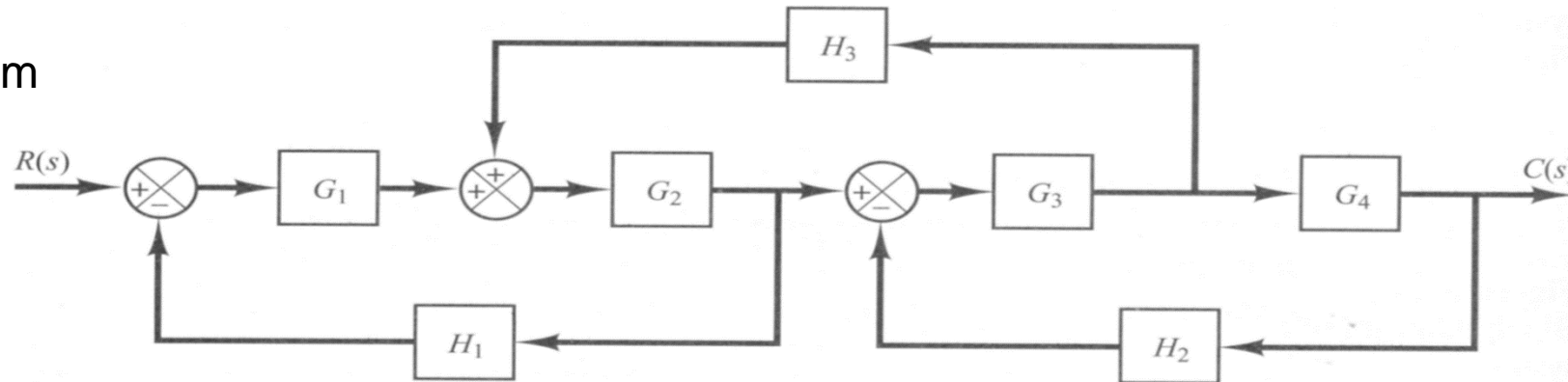


- One forward path
- Four transfer functions in the forward path G_1 , G_2 , G_3 , G_4 .
- Three Feedback Loops.
- Three Summing Junctions

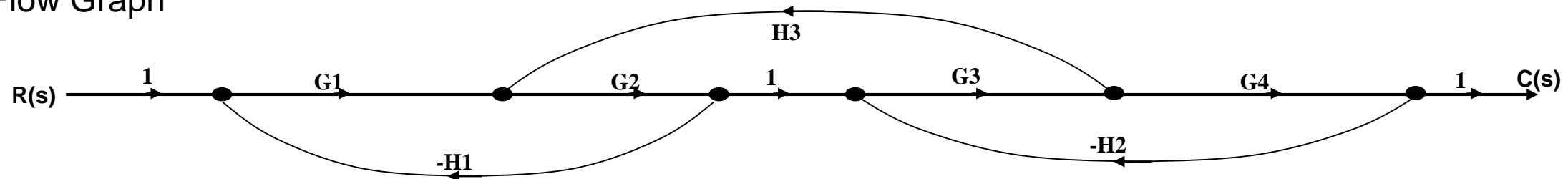
Block Diagram = Flow Graph

Besides Block diagrams, control systems are often represented using Flow Graphs

Block Diagram

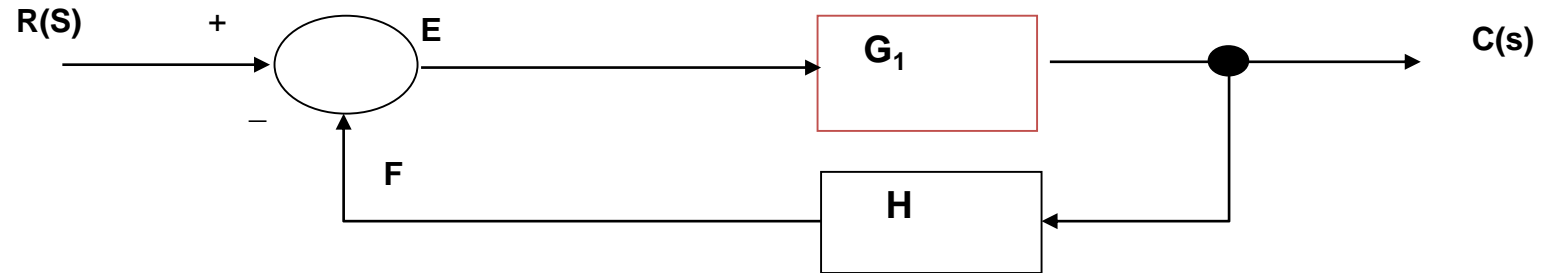


Flow Graph



Note that two of the H transfer functions in the Flow Graph have negative signs. This is necessary since the summing nodes do not have any signs associated with them as in the block diagram.

Solve For The Transfer Function



Solution:

$$C(s) = G_1 E \quad (1)$$

$$F = C(s)H \quad (2)$$

$$E = R(s) - F \quad (3)$$

$$E = R(s) - C(s)H \quad (4)$$

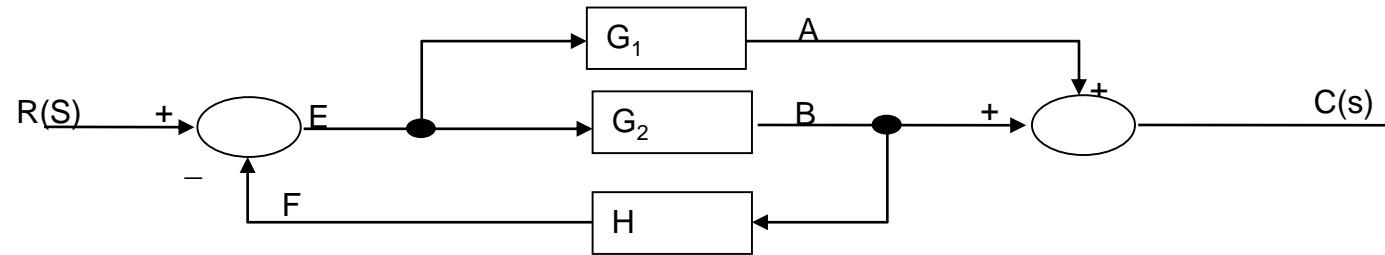
$$C(s) = G_1 [R(s) - C(s)H] \quad (5)$$

$$C(s) + C(s)HG_1 = G_1 R(s)$$

$$C(s)[1 + HG_1] = G_1 R(s)$$

$$C(s)/R(s) = G_1 / (1 + G_1 H)$$

Solve For The Transfer Function



Solution:

$$\begin{aligned} C(s) &= A + B & (1) \\ A &= G_1 E & (2) \\ B &= G_2 E & (3) \\ F &= HB & (4) \\ E &= R(s) - F & (5) \end{aligned}$$

Substitute (2) and (3) into (1);

$$C(s) = G_1 E + G_2 E = (G_1 + G_2) E \quad (6)$$

Substitute (5) into (6);

$$C(s) = (G_1 + G_2) [R(s) - F] \quad (7)$$

Substitute (3) into (4);

$$F = HG_2 E \quad (8)$$

Substitute (5) into (8);

$$F = HG_2 [R(s) - F] \quad (9)$$

Solve (9) for F;

$$F = \frac{HG_2 R(s)}{1 + G_2 H} \quad (10)$$

Substitute (10) into (7);

$$C(s) = (G_1 + G_2) \left[R(s) - \frac{HG_2 R(s)}{1 + G_2 H} \right] \quad (11)$$

$$C(s) = (G_1 + G_2) \frac{1 + G_2 H - HG_2}{1 + G_2 H} R(s)$$

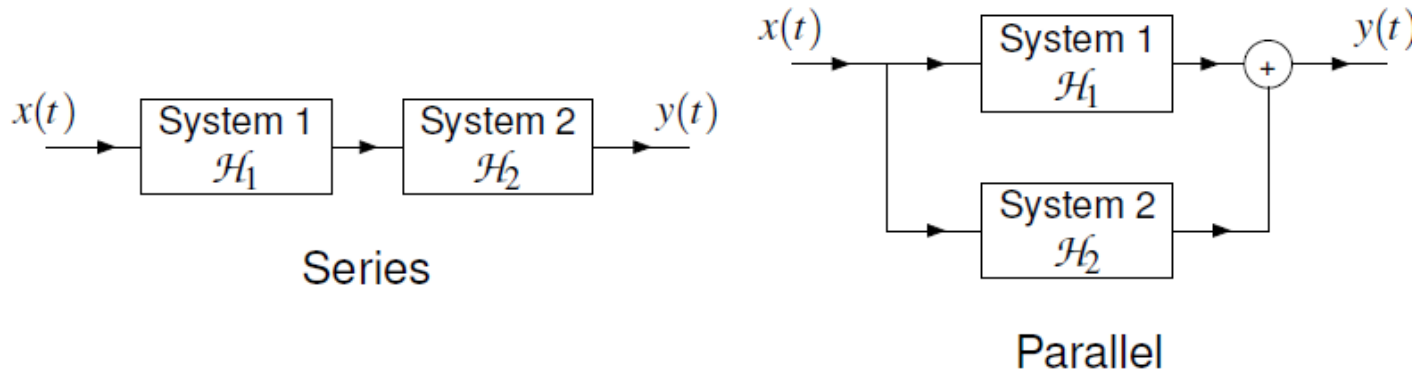
$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(G_1 + G_2)}{1 + G_2 H}$$



Sistemlerin Birbirine Bağlanması

Interconnection of Systems

- *Two basic ways* in which systems can be interconnected are shown below.



- A **series** (or **cascade**) connection ties the output of one system to the input of the other.
- The overall series-connected system is described by the equation

$$y = \mathcal{H}_2 \{ \mathcal{H}_1 \{ x \} \} .$$

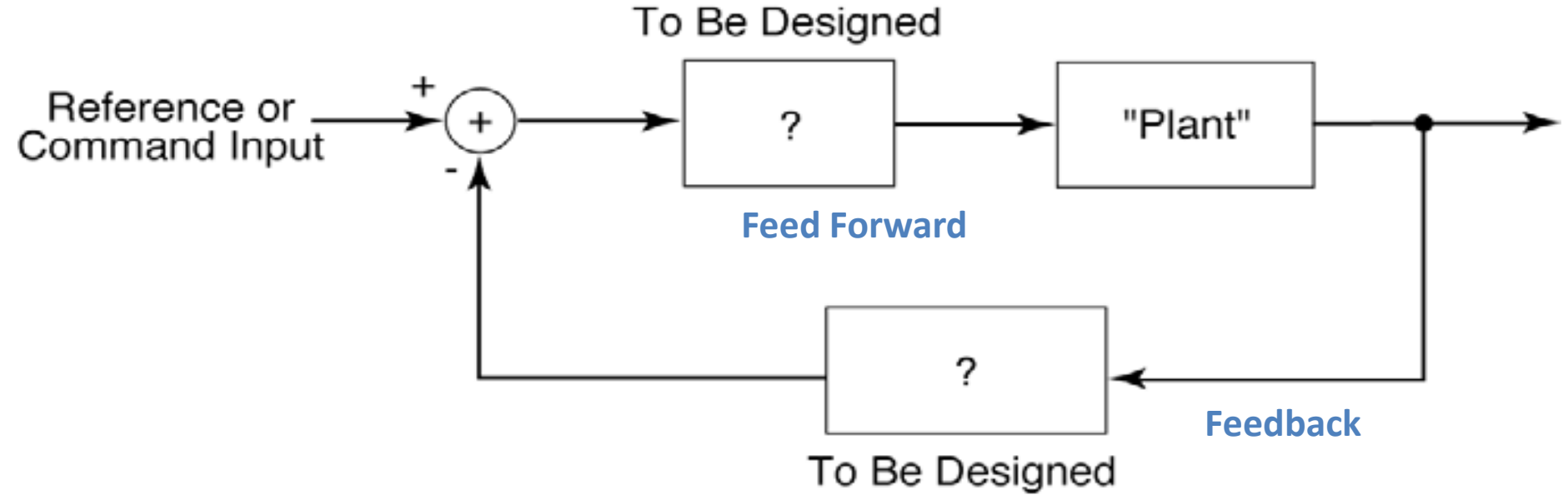
- A **parallel** connection ties the inputs of both systems together and sums their outputs.
- The overall parallel-connected system is described by the equation

$$y = \mathcal{H}_1 \{ x \} + \mathcal{H}_2 \{ x \} .$$



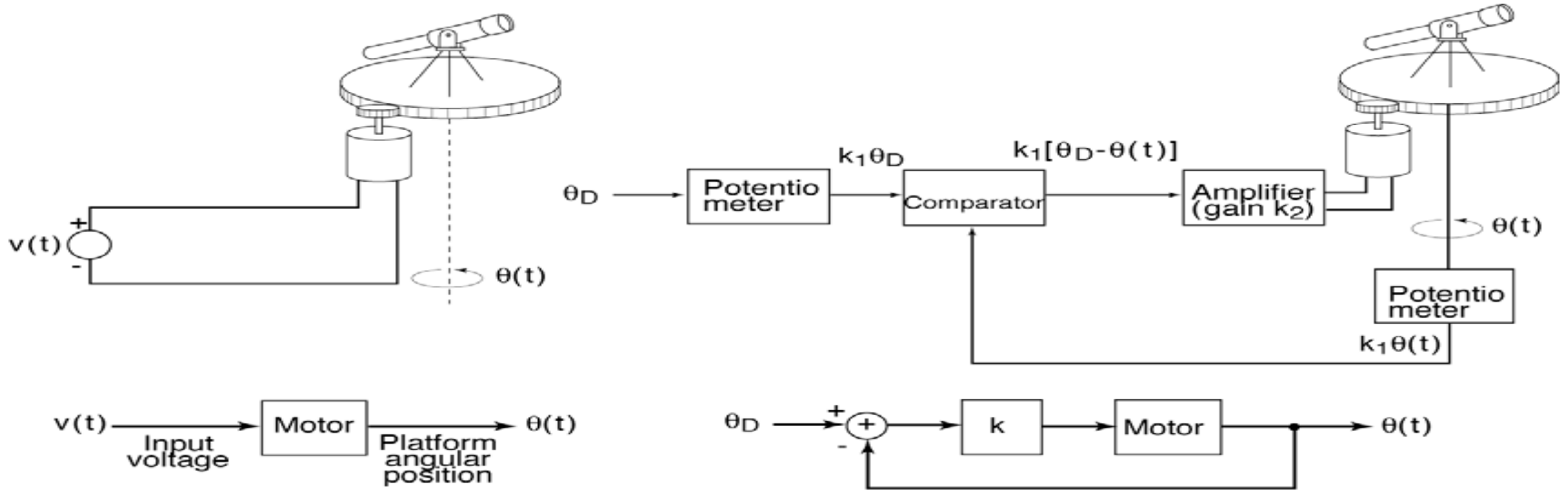
Feedback Control and Transfer Function

A Typical Feedback System



- Why use feedback?
 - Doğrusal Olmayan bileşenleri Azaltma
 - Belirsizliklere ve Değişkenliğe Duyarlılığı Azaltma
 - Kararsız Sistemlerin Stabilize Edilmesi
 - Bozulmaların Etkilerini Azaltma
 - İzleme
 - Sistem Tepki Özelliklerini Şekillendirme (bant genişliği/hız)

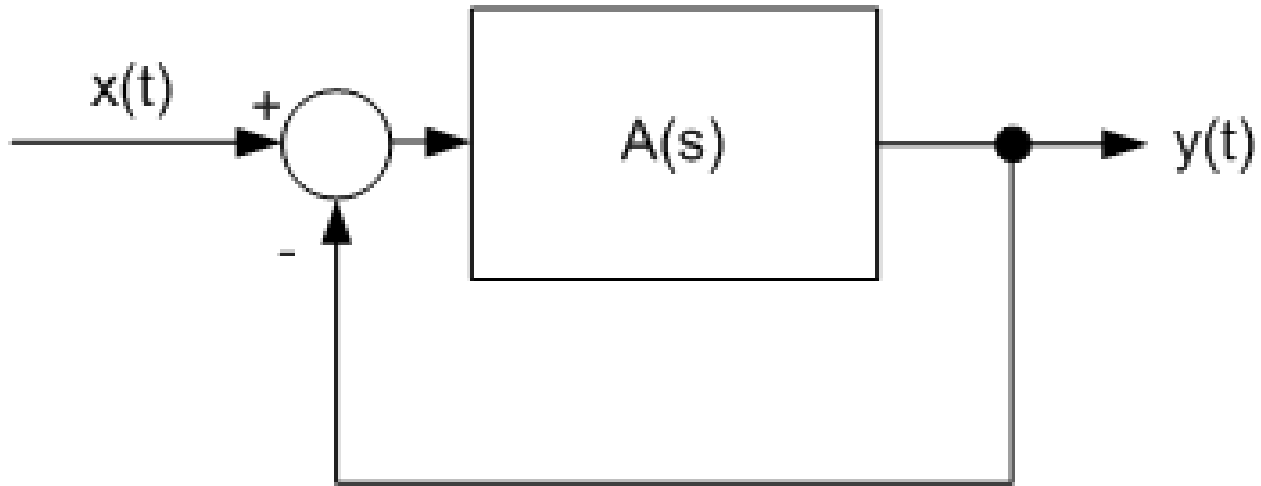
Motivating Example



- Open loop system: aim and shoot.
- What happens if you miss?
- Can you automate the correction process?

- Closed-loop system: automatically adjusts until the proper coordinates are achieved.
- Issues: speed of adjustment, inertia, momentum, stability, ...

Transfer Fonksiyonu

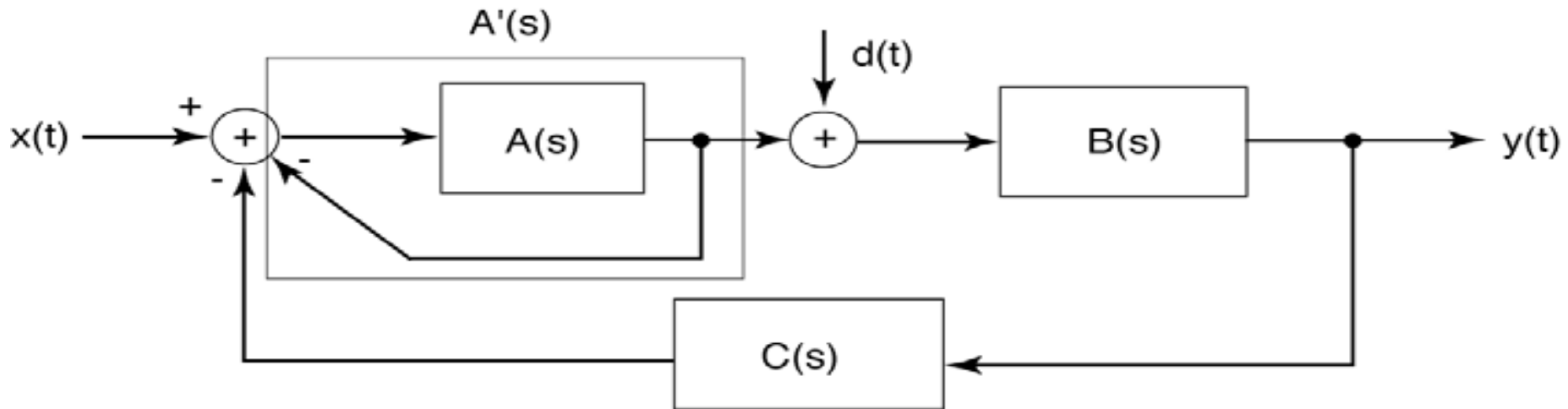


$$Y(s) = A(s) * [X(s) - Y(s)]$$

$$Y(s) = A(s)X(s) - A(s)Y(s)$$

- $[1 + A(s)]Y(s) = A(s)X(s)$
- $Y(s)/X(s) = A(s)/[1 + A(s)]$

System Function For A Closed-Loop System



$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{A'B}{1 + A'BC}$$

$$A' = \frac{A}{1 + A}$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{AB}{1 + A + ABC}$$

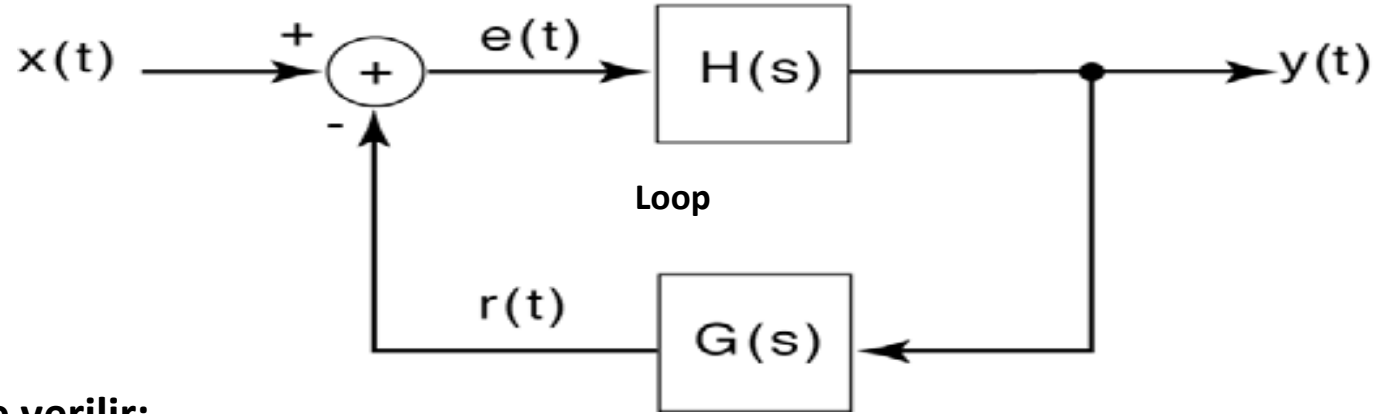
System Function For A Closed-Loop System

- The transfer function of this system :

$$E(s) = X(s) - R(s) = X(s) - G(s)Y(s)$$

$$Y(s) = H(s)E(s) = H(s)[X(s) - G(s)Y(s)]$$

$$Q(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$



- Black's Formula: Kapalı döngü transfer fonksiyonu şu şekilde verilir:
- İleriye Yönelik Kazanç: Bir yazın kazancının 1 olduğu girişten çıkışa giden ileri yolun toplam kazancı.
- Döngü Kazancı: tüm sistemler tarafından paylaşılan kapalı döngü boyunca toplam kazanç..

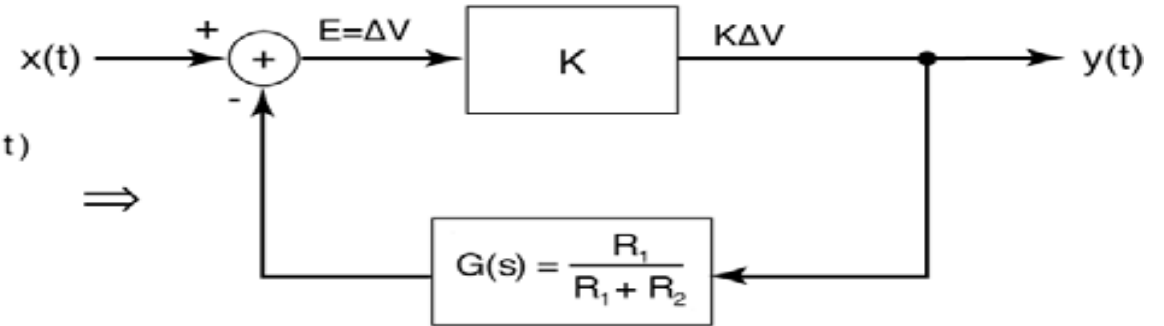
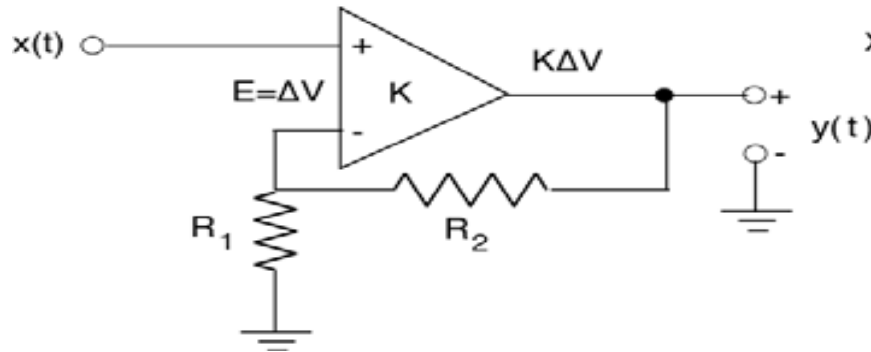
$$\frac{\text{Forward Gain}}{1 - \text{Loop Gain}}$$

The Use Of Feedback As Compensation

- Assume the open loop gain is very large (e.g., op amp):

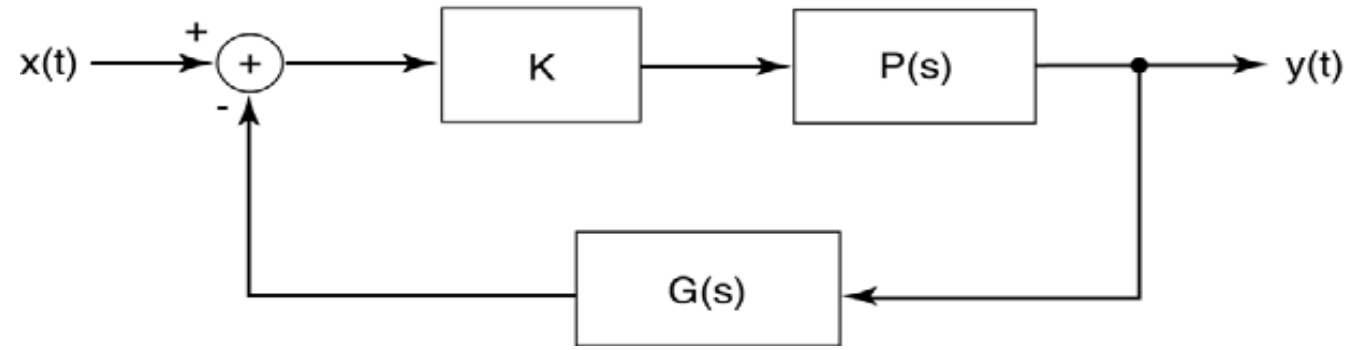
$$Q(j\omega) = \frac{KP(j\omega)}{1 + KP(j\omega)G(j\omega)}$$

$$\approx \frac{1}{G(j\omega)} \quad \leftarrow \text{Independent of } P(s)$$



$$Q(s) \approx \frac{1}{G(j\omega)} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

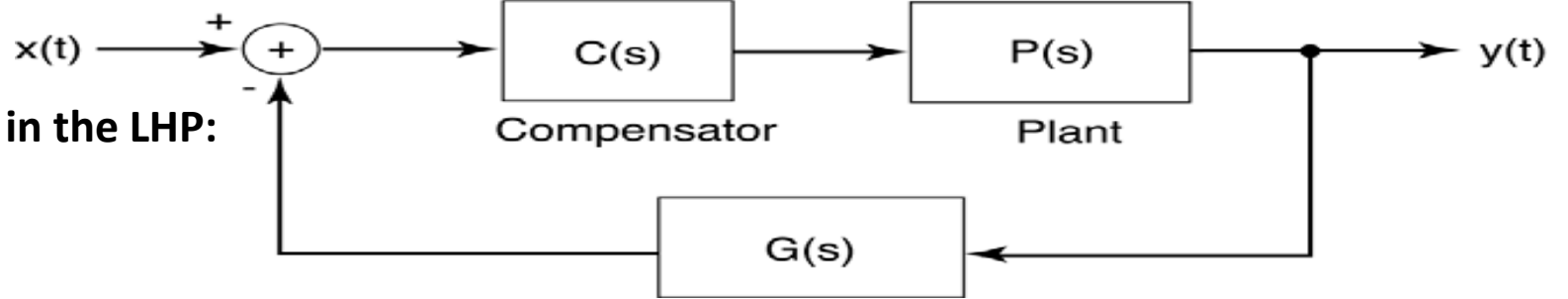
- The closed-loop gain depends only on the passive components (R_1 and R_2) and is independent of the open-loop gain of the op amp.



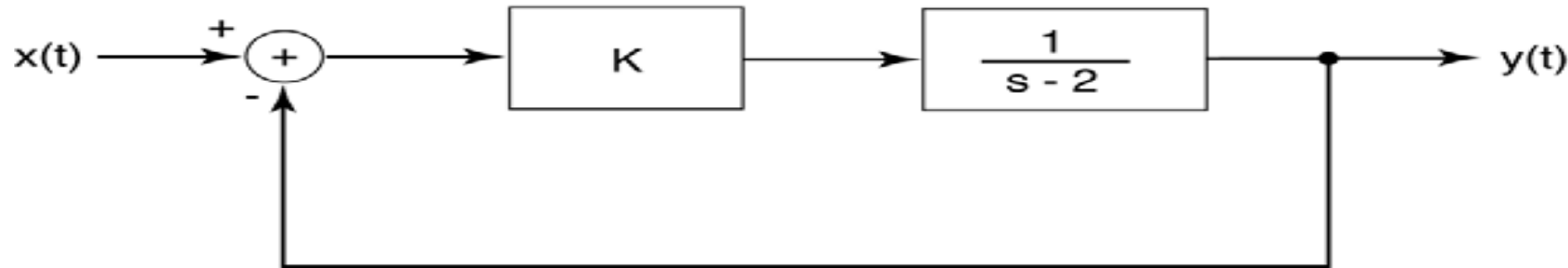
Stabilization of an Unstable System

- If $P(s)$ is unstable, can we stabilize the system by inserting controllers?
- Design $C(s)$ and $G(s)$ so that the poles of $Q(s)$ are in the LHP:

$$Q(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)G(s)P(s)}$$



- Example: Proportional Feedback ($C(s) = K$)



$$P(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$C(s) = K$$

$$G(s) = 1$$

- The overall system gain is:

$$Q(s) = \frac{\frac{K}{s-2}}{1 + \frac{K}{s-2}} = \frac{K}{s-2+K}$$

- The transfer function is stable for $K > 2$.
- Hence, we can adjust K until the system is stable.

Second-Order Unstable System

- Try proportional feedback:

$$P(s) = \frac{1}{s^2 - 4} \quad C(s) = K \quad G(s) = 1$$

$$Q(s) = \frac{K}{1 + \frac{K}{s^2 - 4}} = \frac{K}{s^2 - 4 + K}$$

One of the poles is at

$$p_1 = \sqrt{4 - K} = \begin{cases} > 0, & K < 4 \\ j\sqrt{K - 4}, & K > 4 \end{cases}$$

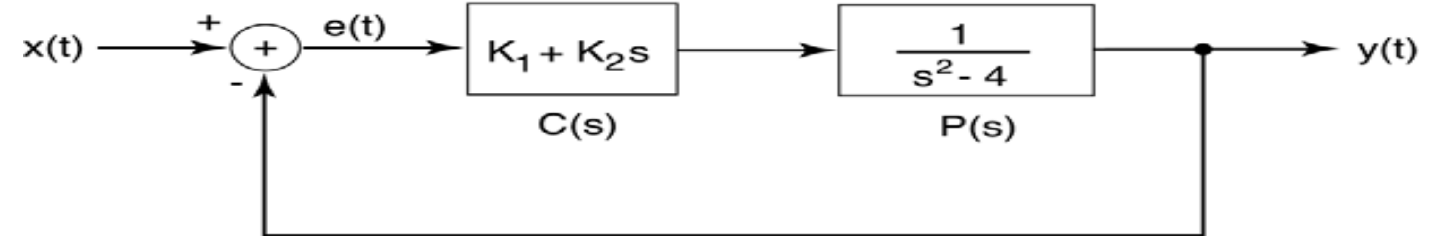
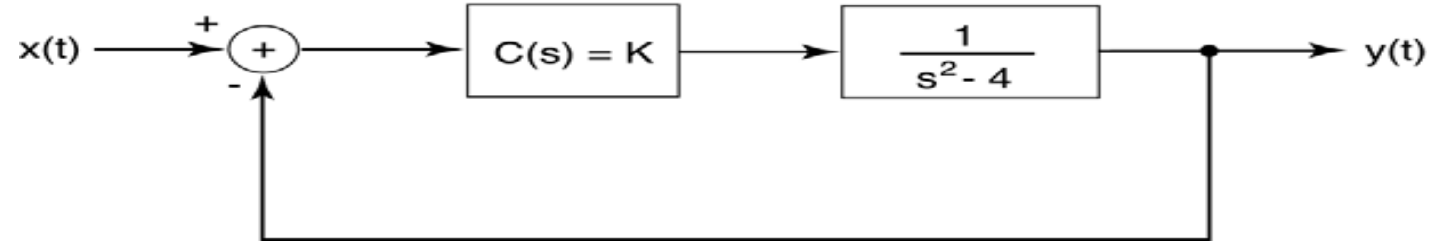
Unstable for all values of K .

- Try damping, a term proportional to d/dt :

$$Q(s) = \frac{\frac{K_1 + K_2 s}{s^2 - 4}}{1 + \frac{K_1 + K_2 s}{s^2 - 4}} = \frac{K_1 + K_2 s}{s^2 + K_2 s + K_1 - 4}$$

- This system is stable as long as:

- $K_2 > 0$: sufficient damping force
- $K_1 > 4$: sufficient gain



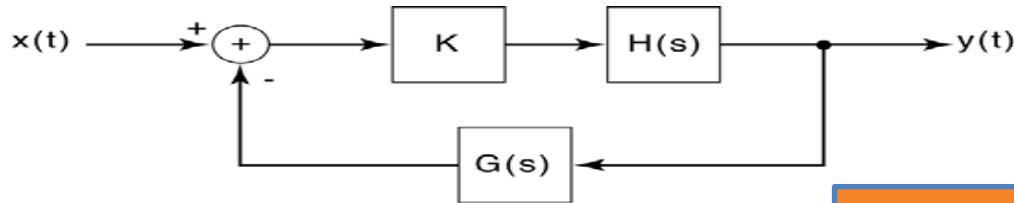
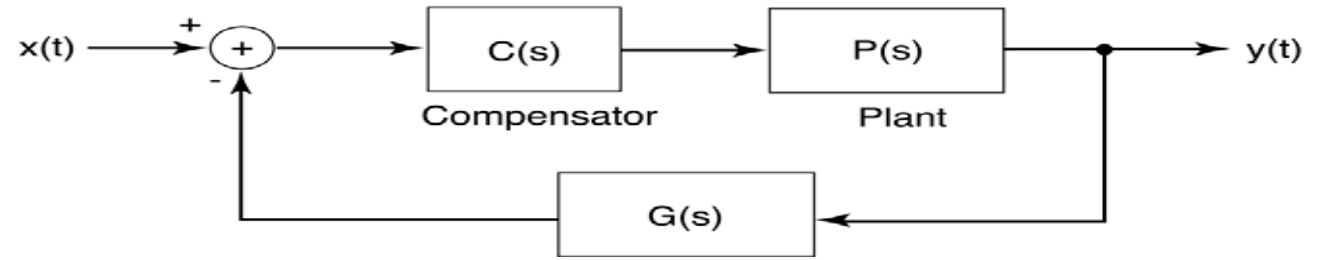
Using damping and feedback, we have stabilized a second-order unstable system.

The Concept of a Root Locus

- Recall our simple control system with transfer function:

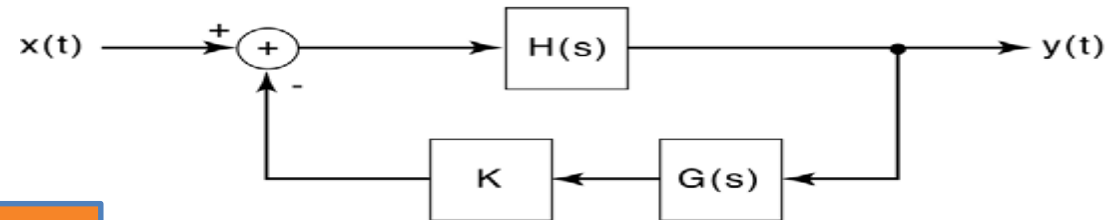
$$Q(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)G(s)P(s)}$$

- The controllers $C(s)$ and $G(s)$ can be designed to stabilize the system, but that could involve a multidimensional optimization. Instead, we would like a simpler, more intuitive approach to understand the behavior of this system.
- Recall the stability of the system depends on the poles of $1 + C(s)G(s)P(s)$.
- A root locus, in its most general form, is simply a plot of how the poles of our transfer function vary as the parameters of $C(s)$ and $G(s)$ are varied.
- The classic root locus problem involves a simplified system:



$$Q(s) = \frac{KH(s)}{1 + KH(s)G(s)}$$

Closed-loop poles are the same.



$$Q(s) = \frac{H(s)}{1 + KH(s)G(s)}$$

Example: First-Order System

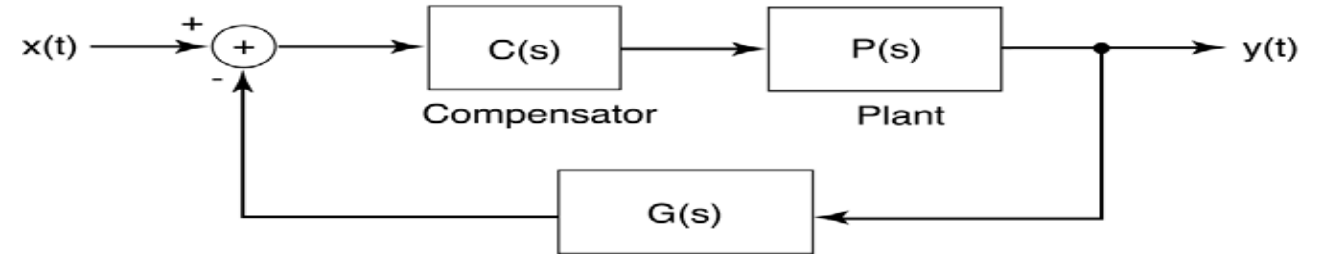
- Consider a simple first-order system:

$$H(s) = \frac{1}{s + 2}$$

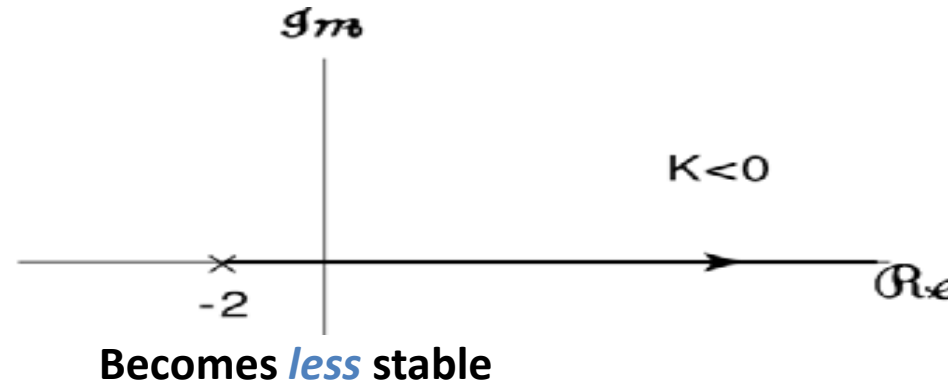
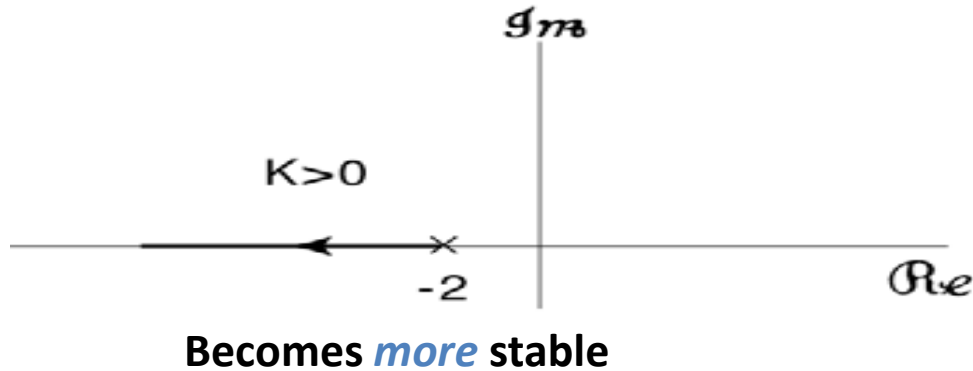
$$C(s) = K$$

$$G(s) = 1$$

$$Q(s) = \frac{C(s)H(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)} = \frac{\frac{K}{s + 2}}{1 + \frac{K}{s + 2}} = \frac{K}{s + 2 + K}$$

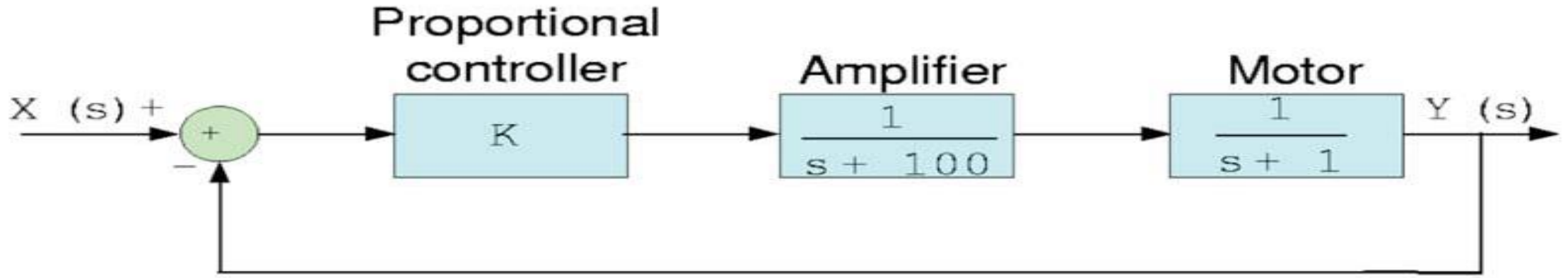


- The pole is at $s_0 = -(2+K)$. Vary K from 0 to ∞ :



- Observation: improper adjustment of the gain can cause the overall system to become unstable.

Example: Second-Order System With Proportional Control

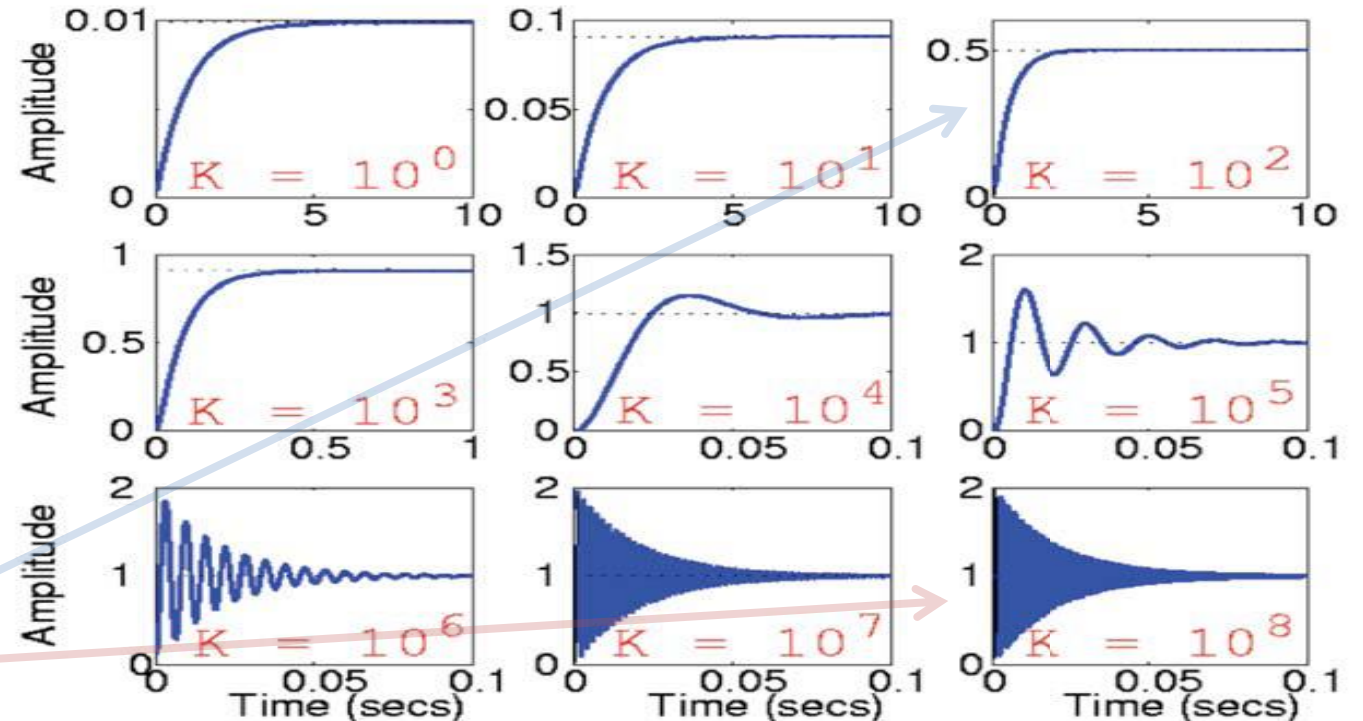


- Using Black's Formula:

$$Q(s) = \frac{K}{(s+100)(s+1) + K}$$

$$= \frac{K}{(s+100)(s+1) + K}$$

- How does the step response vary as a function of the gain, K ?
- Note that as K increases, the system goes from *too little gain* to *too much gain*.





Sinyal ve Sistem
Davranışlarının Yorumlanması

Türevin Yorumu

Birinci Türev

- Birinci ve ikinci türevlerinin verdiği bilgilerden $f'(x)$ veya df/dx olarak yazılan $f(x)$ fonksiyonunun ilk türevi, x noktasındaki teğet çizgisi fonksiyonun eğimidir.
- Grafik olmayan terimlerle ifade etmek gerekirse, ilk türev bize bir fonksiyonun nasıl arttığını veya azaldığını ve ne kadar artacağını veya azalacağını söyler.
- Pozitif eğim bize x arttıkça $f(x)$ 'nin de arttığını söyler. Negatif eğim bize x arttıkça $f(x)$ 'in azaldığını söyler. Sıfır eğim bize özel bir şey söylemez: fonksiyon o noktada artar, ne azalır veya yerel maksimumda veya yerel minimumda olabilir.

Türevler açısından bu bilgileri yazarken şunu görüyoruz:

-
- $\frac{df(p)}{dx} > 0$, ise $f(x)$, $x = p$ 'de artan bir fonksiyondur.
- $\frac{df(p)}{dx} < 0$, ise $f(x)$, $x = p$ 'de azalan bir fonksiyondur.
- $\frac{df(p)}{dx} = 0$, ise o zaman $x = p$, $f(x)$ 'in kritik noktası olarak adlandırılır ve $x(p)$ 'deki $f(x)$ 'nin davranışı hakkında yorum yapılamaz.

Türevin Yorumu

İkinci Türev

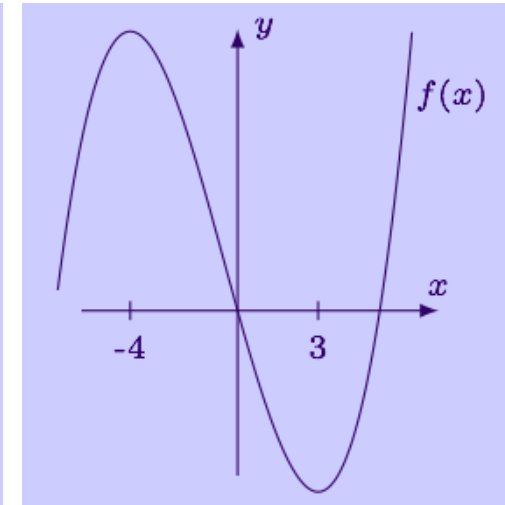
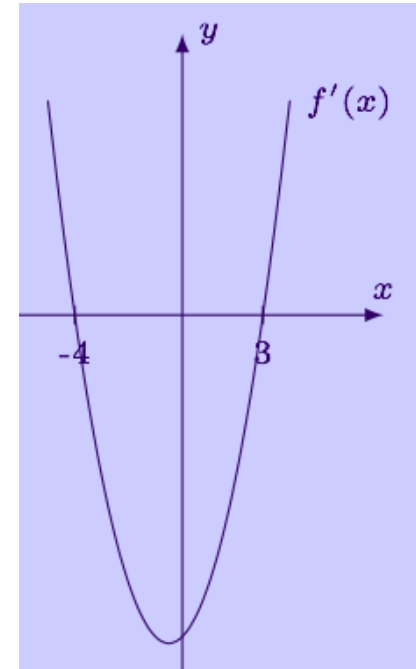
- Bir fonksiyonun ikinci türevi, $f''(x)$ veya $\frac{d^2f}{dx^2}$ olarak yazılır. İlk türev bize fonksiyonun arttığını veya azaldığını söylese de, ikinci türev,
 - $x = p$ 'de $\frac{d^2f(p)}{dx^2} > 0$ ise, $f(x)$, $x = p$ 'de yukarı doğru kavislidir.
 - $x = p$ 'de $\frac{d^2f(p)}{dx^2} < 0$ ise, $f(x)$, $x = p$ 'de aşağı doğru kavislidir.
 - $x = p$ 'de $\frac{d^2f(p)}{dx^2} = 0$ ise, o zaman $f(x)$ 'in $x = p$ 'deki davranışı hakkında bir yorum yapamıyoruz.
 -
- Birinci türevin anlamından x , $f(x)$ fonksiyonunun kritik bir noktası olduğunda, o noktada fonksiyonun davranışı hakkında bir yorum yapabilmek için, x 'in bölgesel maksimum veya bölgesel minimum olduğunu öğrenmek için genellikle işlevin ikinci türevi kullanılır.

Örnek

- $f(x)=2x^3+3x^2-72x$. Determine the intervals over which the function is increasing, and the intervals over which the function is decreasing.
- Find the first derivative.
- $f'(x)=6x^2+6x-72=6(x^2+x-12)=6(x+4)(x-3)$

Interpret the graph.

- We know that when the derivative is positive, the function is increasing. The graph above shows that the derivative is positive (i.e., above the x-axis) when $x < -4$ and when $x > 3$.
- We can also see that the derivative is negative (below the x-axis) when $-4 < x < 3$
- The function is increasing on the intervals from $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$. Likewise, the function is decreasing over the interval $(-4, 3)$



Özdeğer ve özvektörlerin özellikleri

Özdeğer ve özvektörlerin bazı önemli özellikleri

1. Özdeğer problemi sadece kare matrisler için tanımlıdır.
2. $\underline{A}_{n \times n}$ matrisinin daima n tane özdeğeri, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ vardır.
3. λ_i özdeğeri \underline{A} matrisinin determinantını sıfır yapar.
4. Her λ_i özdeğerine karşılık gelen bir \underline{x}_i özvektörü vardır. λ_i ve \underline{x}_i çifti beraber $(\underline{A} - \lambda_i \underline{I})\underline{x}_i = \underline{0}$ bağıntısını sağlar.
5. Özdeğerler pozitif, negatif, sıfır gerçekteki sayıları olabildiği gibi sanal sayılar da olabilir.
6. Özvektörlerin elemanları gerçekteki ve sanal sayılardan oluşabilir.
7. Elemanları gerçekteki sayılardan oluşan \underline{A} simetrik ($\underline{A}^T = \underline{A}$) ise, tüm özdeğerler de gerçekteki sayılardan oluşur. Simetrik matrisin özvektörleri ortogonaldır: $\underline{X}^T \underline{X} = \underline{I}$
8. \underline{A} simetrik ($\underline{A}^T = \underline{A}$) ve pozitif tanımlı ise tüm özdeğerler de pozitifdir.
9. Bazı özdeğerler birbirine eşit olabilir. Fakat Eşit özdeğerlerin özvektörleri mutlaka farklıdır. Çünkü özvektörler doğrusal bağımsızdır. Örneğin

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \text{ birim matrisinde } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \text{ ve özvektörler } \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. Görüldüğü gibi, özdeğerler birbirine eşit fakat özvektörler birbirinden farklıdır.

Özdeğer ve özvektörlerin özellikleri

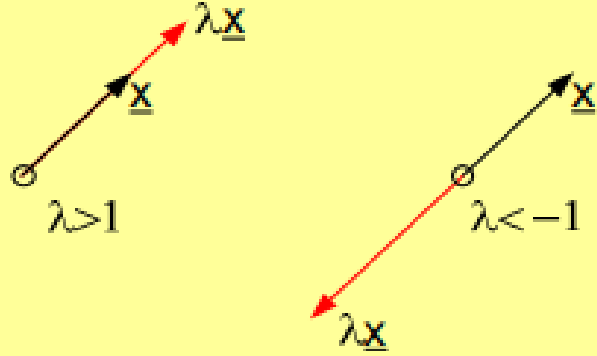
10. \underline{x}_i özvektörünün herhangi bir gerçektek c sayısı ile çarpılması veya bölünmesi sonucunda elde edilen yeni vektör de bir özvektördür. Yani yeni vektör $c\underline{x}_i$ ile de $(\underline{A} - \lambda_i \underline{D})(c\underline{x}_i) = \underline{0}$ sağlanır. Bu önemli özellik nedeniyle, istenirse, c herhangi bir gerçektek sayı seçilebilir.
11. \underline{A} ve \underline{A}^T aynı özdeğerlere sahiptir, fakat özvektörleri genelde farklıdır.
12. $\underline{A}_{n \times n}$ ve $\underline{B}_{n \times n}$ kare matrisler olmak üzere $\underline{A} \underline{B}$ ve $\underline{B} \underline{A}$ matrisleri aynı özdeğerlere sahiptir.
13. \underline{A} nın özdeğeri λ_i ise \underline{A}^{-1} in özdeğeri $1/\lambda_i$ dir. $\lambda_i = 0$ durumunda $1/\lambda_i$ tanımsızdır, bu ise \underline{A} nın tekil ve \underline{A}^{-1} in olmadığı anlamındadır.
14. $\underline{A}_{n \times n}$ matrisinin izi özdeğerlerin toplamına eşittir:
$$\text{İz } \underline{A} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n.$$
15. $\underline{A}_{n \times n}$ matrisinin determinantı özdeğerlerin çarpımına eşittir:
$$\det \underline{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n.$$

Dolayısıyla, özdeğerlerden herhangi biri sıfırsa, $\lambda_i = 0$, $\det \underline{A} = 0$ dir ve \underline{A}^{-1} tanımsızdır.

Özdeğer ve özvektörlerin geometrik yorumu

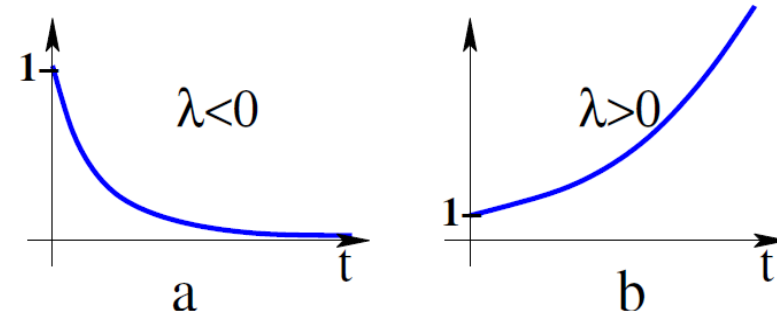
Özdeğer ve özvektörün geometrik yorumu

$A \underline{x} = \lambda \underline{x}$ bağıntısından hesaplanan λ özdeğeri ve \underline{x} özvektörü şu şekilde yorumlanabilir: A matrisi \underline{x} vektörünü λ kadar büyütme veya küçültmektedir. \underline{x} vektörünün doğrultusu değişmemekte fakat yönü değişebilmektedir. λ pozitif ise \underline{x} ve $\lambda \underline{x}$ aynı yönde, aksi hale ters yöndedirler.



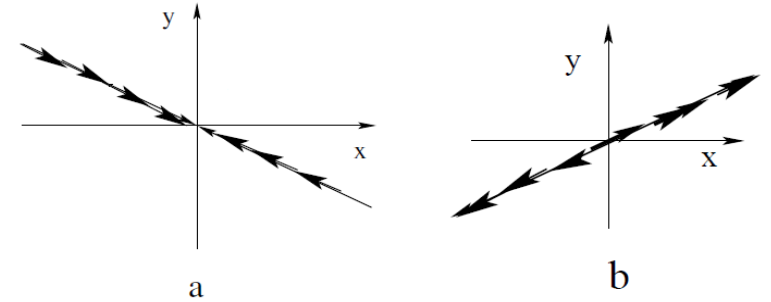
Özdeğerlerden kararlı ya da kararsız durumların belirlenmesi

- λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine bağlı olarak birkaç farklı denge türü ortaya çıkmaktadır. Bilindiği gibi λ_1 ve λ_2 , genel ikinci dereceden bir denklem olan $|A - \lambda I| = 0$, karakteristik denklemin kökleridir. Bu nedenle kökler gerçekte veya karmaşık sayılar olabilir ve aşağıdaki denge kararlılığı durumları ortaya çıkarır.
- Özdeğerler, çözüm denkleminde $e^{\lambda_1 t}$ ve $e^{\lambda_2 t}$ katkı verirler. Bu durumda üssel negatif özdeğeri olan fonksiyon $t \rightarrow \infty$ olurken çözüme yakınsar. Üssel pozitif özdeğeri olan fonksiyon $t \rightarrow \infty$ olurken çözüme ıraksar.
- $e^{\lambda t}$, fonksiyonunun iki ana davranış türü vardır.
- $\lambda < 0$ iken t arttığında $e^{\lambda t}$ kararlı bir noktaya yaklaşır.
- $\lambda > 0$ iken t arttığında $e^{\lambda t}$ kararsız sonsuza gider.



Özdeğerlerden kararlı ya da kararsız durumların belirlenmesi

- Bu durumda,
- $\lambda < 0$ iken, aşağıdaki denklem kararlı bir durum belirleyecektir.
- $\lambda > 0$ iken, aşağıdaki denklem kararsız bir durum belirleyecektir.
- $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$
- Kararlı durumlar:
 - Kararlı düğüm noktası: $\lambda_1 < 0$ ve $\lambda_2 < 0$; kökler reel.
 - Kararlı spiral: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$; $\alpha < 0$;
- Kararsız durumlar:
 - Kararsız düğüm noktası: $\lambda_1 > 0$ ve $\lambda_2 > 0$; kökler reel
 - Kararsız spiral: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$; $\alpha > 0$
 - Dairesel spiral: $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$; $\alpha = 0$;
 - Eyer ya da denge noktası: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ ya da $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$; kökler reel



Denge – Dönüm - Eyer Noktaları

- Bir f fonksiyonunun konvekslikten konkavlığa veya konkavlıktan konveksliğe geçtiği ve fonksiyonunun sürekli olduğu noktaya dönüm (büküm) noktası adı verilir.
- Denge, değişmeyen bir sistem durumudur.
- İki boyutlu bir uzayda kararlı denge: düğüm ve odak
- Bir sistemin dinamikleri bir diferansiyel denklem veya bir diferansiyel denklem sistemi ile tanımlanıyorsa, o zaman denge noktası bir türevi (tüm türevleri) sıfıra ayarlayarak tahmin edilebilir.
- Özdeğerlerin hiçbirinin gerçek kısmı yoksa denge noktası hiperboliktir.
- Tüm özdeğerlerin negatif gerçek kısmı varsa, denge kararlı bir denklemdir.
- En az birinin pozitif bir gerçek kısmı varsa, denge kararsız bir düğümdür.
- En az bir özdeğerin negatif gerçek kısmı varsa ve en az birinin pozitif gerçek kısmı varsa, denge bir eyer noktasıdır.

Denge durum noktaları ve faz düzlemleri

- Lineer veya lineer olmayan tipten $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$, denklemler teorisinde $x(t)$ çoğu kez x -ekseninde hareket eden bir noktanın t anındaki yerini ve $y(t) = \dot{x}(t)$ de t anındaki hızını tanımlar. $(x(t), y(t))$ ikilisi, birlikte, sistemin t anındaki durumunu belirler.
-
- Sistemin davranışı, (x, y) -düzleminde $(x(t), y(t))$ noktasının geometrik yeri ile tarif edilebilir. Bu biçimde diferansiyel denklem ile ilişkilendirilen (x, y) -düzlemi faz düzlemi olarak adlandırılır. $(x(t), y(t))$ parametrik çözüm eğrisine yörünge ve onun görüntüsüne de orbit veya iz denir. Bir yörünge ile orbit arasındaki fark, yörünge'nin çözüm eğrisinin oryantasyonunu veren t parametresi ile donatılmış olmasıdır.
-
- $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$, genel denklemi için, denge noktaları x ekseninde bulunur ve tüm $f(x, 0) = 0$ çözümleri tarafından tanımlanır. (x, y) ($y = \dot{x}$) düzlemdeki faz yolları birinci mertebeden denklemin çözümleri yardımıyla belirlenir.

Denge durum noktaları ve faz düzlemleri

- $y(t) = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$

-

- $\ddot{x} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = y \frac{dy}{dx} = f(x, y)$

-

- $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y)}{y}$

-

- $\frac{dy}{dx} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}}$

-

- x ve y eksenlerindeki ölççeklerin her zaman aynı olmadığı unutulmamalıdır. Genellikle eş zamanlı diferansiyel denklemler olarak muamele edilen $f(x, y)$ çözümü olan $(x(t), y(t))$, t cinsinden parametrik olarak elde edilir.

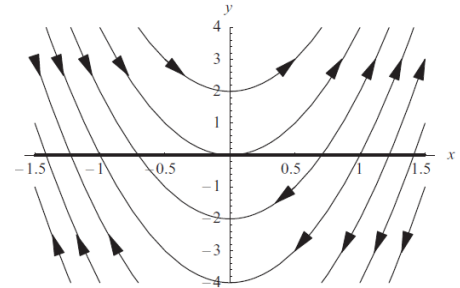
-

Denge durum noktaları ve faz düzlemleri

- $\ddot{x} - 8\dot{x}x = 0$ diferansiyel $f(x, y) = 8xy$ olur. $f(x, 0) = 0$ olduğundan, x eksenindeki her nokta bir denge noktasıdır. Faz yolları için diferansiyel denklem,
- $\ddot{x} = 8\dot{x}x$
- $\dot{x} = y$
- $\dot{y} = 8xy$
-
- $\frac{dy}{dx} = 8x$, genel çözüm, $y=4x^2 + C$ dir.
- $f(x, y) = 8xy$ denkleminin faz çözüm çizgileri aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Matlab Yazılım kodu:

```
clear all
close all
x = linspace(-1.5,1.5,15);
y = linspace(-4,4,15);
[M1,M2]=size(y);
[X,Y] = meshgrid(x,y);
U = Y;
for i=1:M2
    for j=1:M2
        V(i,j)=-8*X(i,j)*Y(i,j);
    end
end
figure(1), quiver(X,Y,U,V,'r')
```

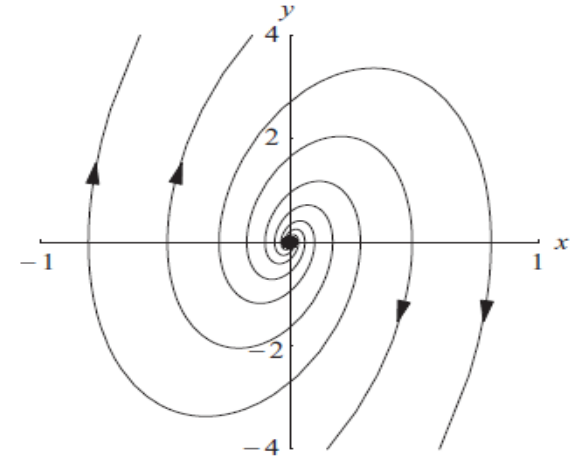


Denge durum noktaları ve faz düzlemleri

- $\ddot{x} - 4\dot{x} + 40x = 0$
diferansiyel $f(x, y) = 4y - 40x$
olur. $f(x, 0) = 0$ olduğundan,
x eksenindeki her nokta bir
denge noktasıdır. Faz yolları
için diferansiyel denklem,
- $f(x, y) = 4y - 40x$ denkleminin
faz çözüm çizgileri aşağıdaki
şekilde verilmiştir.

Matlab Yazılım Kodu:

```
clear all
close all
x = linspace(-1,1,20);
y = linspace(-4,4,20);
[M1,M2]=size(y);
[X,Y] = meshgrid(x,y);
U = Y;
for i=1:M2
    for j=1:M2
        F(i,j)=-40*X(i,j)+4*Y(i,j);
    end
end
figure(1), quiver(X,Y,U,F,'r')
```



Belirsizlik

Bir f fonksiyonunun konvekslikten konkavlığa veya konkavlıktan konveksliğe geçtiği ve fonksiyonunun sürekli olduğu noktaya dönüm (büküm) noktası adı verilir.

$\frac{\infty}{\infty}$ Belirsizlik Hali

Bu belirsizlik halinde de L' Hospital Kuralı geçerlidir. Zira $\frac{u}{v} = \frac{1}{v} : \frac{1}{u}$ biçiminde yazılabilir. Bu durumda $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği $\frac{0}{0}$ belirsizliğe döndürür.

- **0.∞ Belirsizlik Hali**

$u \cdot v = \frac{u}{\frac{1}{v}}$ eşitliği yardımıyla 0.∞ belirsizliği $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ haline getirilebilir.

- **∞-∞ Belirsizlik Hali**

Bu belirsizlik hali, $u - v = \frac{\frac{1}{v} - \frac{1}{u}}{\frac{1}{uv}}$ eşitliği yardımıyla $\frac{0}{0}$ belirsizlik haline dönüştürebilir.

- **0⁰, ∞⁰, 1[∞] Belirsizlik Halleri**

x sonlu bir değere veya $\pm\infty$ değerlerine yaklaştığında $y = [u(x)]^{v(x)}$ biçimindeki fonksiyonlar bu belirsizlik hallerinden birini verebilir. Bu durumda her iki tarafın logaritması alınarak

$$\ln y = v(x) \ln u(x)$$

eşitliği elde edilir. Sağdaki ifadenin limiti, 0.∞ belirsizliğine sahip olur. Bu limiti bilinen yolla hesaplanır.

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln y = \lambda \text{ ise } \lim_{x \rightarrow a} y = e^\lambda \text{ olur.}$$

Numerical Integration and Differentiation of a Polynomial

```
clear all; close all
```

```
M=41, s=(M-1)/20;
```

```
for i=1:M, t(i)=-s+(i-1)*0.1; end
```

```
% y(t)=2*t^3+3*t^2-2*t-5
```

```
P=[2 3 -2 -5];
```

```
P=[2 3 -2 -5];
```

```
Q = polyder(P)
```

```
I = polyint(P,1)
```

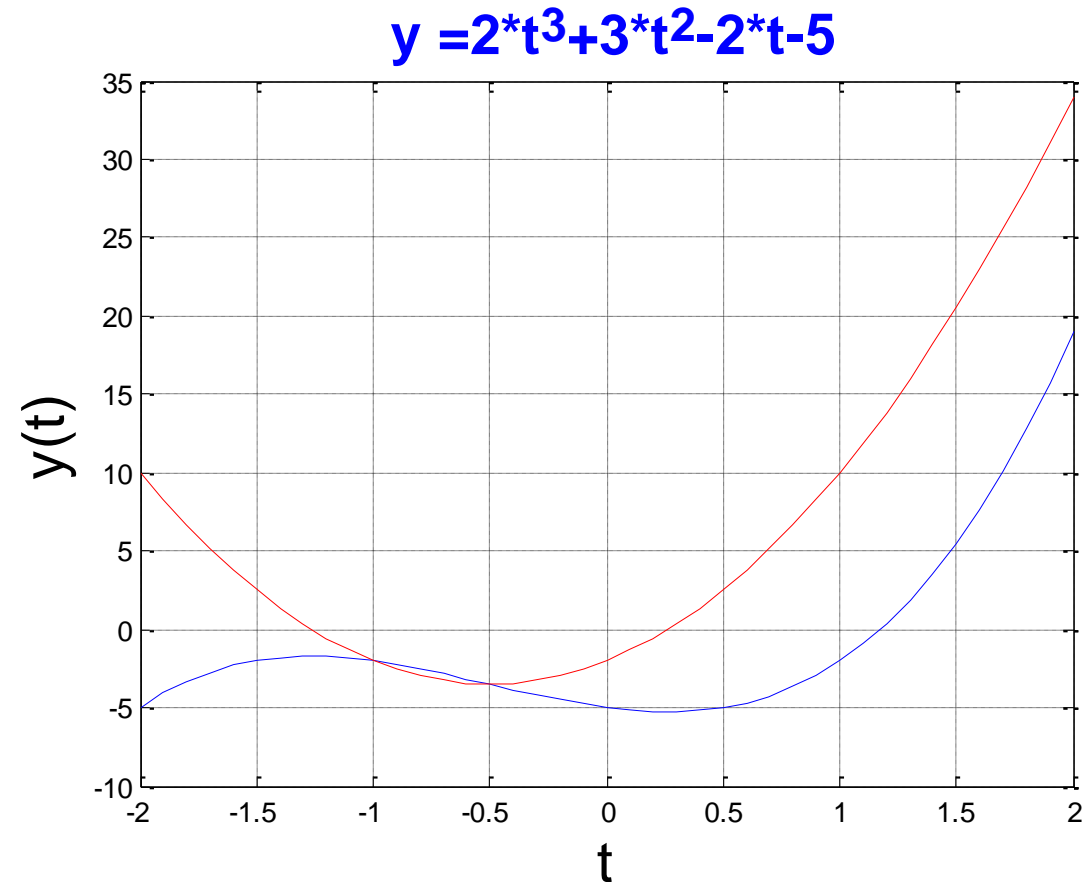
```
figure, plot(t,polyval(P,t),'b', t,polyval(Q,t),'r' )
```

```
title('\fontsize{20}\bf y =2*t^{3}+3*t^{2}-2*t-5','Color','b')
```

```
xlabel('t','FontSize', 20)
```

```
ylabel('y(t)','FontSize', 20)
```

```
grid on
```



Symbolic Derivative - Integral

- clear all,
- close all
- syms f(t),t
- $f(t) = 2*t^3+3*t^2-2*t-5;$
- $df = \text{diff}(f,t)$
- $f1 = \text{int}(df,t)$

- $df(t) = 6*t^2 + 6*t - 2$
- $f1(t) = t*(2*t^2 + 3*t - 2)$

Usage Notes

- These slides were gathered from the presentations published on the internet. I would like to thank who prepared slides and documents.
- Also, these slides are made publicly available on the web for anyone to use
- If you choose to use them, I ask that you alert me of any mistakes which were made and allow me the option of incorporating such changes (with an acknowledgment) in my set of slides.

Sincerely,
Dr. Cahit Karakuş

`cahitkarakus@esenyurt.edu.tr`

Thank You